BEITRÄGE

ZUR

GEOMETRIE DES DREIECKS

VON

R. O. CONSENTIUS.

CARLSRUHE.

DRUCK UND VERLAG DER G. BRAUN'SCHEN HOFBUCHHANDLUNG.

1877.

SEINER KÖNIGLICHEN HOHEIT

dem

GROSSHERZOG

FRIEDRICH VON BADEN

zum

Jubiläum einer fünfundzwanzigjährigen segensreichen Regierung

in tiefster Ehrfurcht gewidmet

vom

VERFASSER.

Ein Kranz verwelkt. — Ein Lied verklingt. —
Was kann, was soll ich bringen,
Das meines Danks Gefühl durchdringt?
— Mein Leben und mein Ringen? —

Ich wag's! Dem EDELSTEN ein Jahr,
Voll Eifer und voll Streben,
IHM bring' ich es ganz, wie es war,
Dankbar von meinem Leben.

Und überlebte mich der Dank,
Und könnt' er weithin klingen,
Als wie ein Horn vom Bergeshang,
So möcht' ich gern ihn bringen.

Vorrede.

Wenn zwei ihrer Gattung nach verschiedene geometrische Figuren durch ihre Verbindung nach gewissen Gesetzen in Abhängigkeit treten, und man unterzieht die durch diese Verbindung entstandene neue Figur einer näheren Betrachtung, so erstaunt man je länger je mehr über die unerschöpfliche Fülle von Engagements zu neuen Untersuchungen und man erkennt es, dass der Reichthum von noch unerkannten Gesetzen auch in der niederen Geometrie, was oft angezweifelt wird, ein so grosser ist, dass er jeder Ausbeute spottet. Weil nun eine solche Figur ein Beweismittel für eine Masse von Lehrsätzen wird, dürfte man sie diesen Lehrsätzen gegenüber die allgemeine Figur nennen.

Auch hier wird nun eine solche Figur construirt und betrachtet, und abgesehen von dem Satze bezüglich der Monde des Hippokrates und dem Lehrsatze 64, in welchen Kreise vorkommen, welche zur allgemeinen Figur nicht gehören, blieben ihres Reichthums wegen alle Betrachtungen auf diese Figur beschränkt. Aber auch eine andere Beschränkung, die der Mittel, wurde der allgemeineren Zugänglichkeit wegen für passend gehalten. Die neuere Geometrie, ja selbst die Anwendung der Doppelverhältnisse waren bis jetzt ausgeschlossen, und die hier angewendeten Mittel könnte man ungefähr durch die Geometrie des Euklid begränzen. Trotz all dieser Beschränkungen traten bei der Untersuchung eine Anzahl wichtiger Gesetze hervor, die neu schienen und hier wiedergegeben werden. Allerdings stellte es sich durch eingehende Nachforschungen heraus, dass verschiedene dieser

Gesetze in der Wissenschaft bereits verzeichnet sind, doch abgesehen davon, dass diese den weitaus kleineren Theil des hier Gebrachten ausmachen, so gewinnen selbst diese, mit den andern zusammengestellt, an einer nicht zu verachtenden Wichtigkeit, denn sie treten so aus dem Rahmen des bloss Interessanten und deshalb leicht Vergesslichen in den der greifbar nützlichen Bedeutung, indem sie zu wichtigen Elementarsätzen werden.

Zieht man die Resultate dieser Untersuchungen bei der Beschränkung der Mittel in Betracht, so dürfte man der niederen Geometrie eine grössere Achtung, als es in neuerer Zeit grossentheils geschieht, zollen, wenn man durch sie Lehrsätze, die bis jetzt nur die neuere Geometrie brachte, z. B. die Gleichung der reciproken Werthe der Radien der vier Berührungskreise, allein durch Betrachtung der allgemeinen Figur ohne alle Hülfslinien bringt und beweist, wenn man durch sie ferner Sätze der neueren Geometrie verallgemeinert und schliesslich Gesetze aufstellt, die in der Wissenschaft trotz ihrer umfassenden Mittel noch nicht verzeichnet sind.

Es ist natürlich, dass alle Untersuchungen dieser Art, was sie mit der ganzen Wissenschaft gemein haben, fragmentarisch bleiben müssen, auch liegt der Schwerpunkt dieses Schriftchens nicht in der Anzahl neuer Lehrsätze, sondern in der Hinweisung auf die Wichtigkeit der allgemeinen Figur als einer unerschöpflichen Quelle neuer Lehrsätze.

Der Verfasser.

Inhalt.

Seite

Bestimmungen und Erklärungen 1

Erster Abschnitt.

Das arithmetische Verhältniss der Dreiecksseiten in der Form $\frac{a+b-c}{2}$, das arithmetische Verhältniss der Dreieckswinkel in der Form $\frac{A+B-C}{2}$ und die Beziehungen der Höhen zu den Mittelpunkten der Berührungskreise und dem des umschriebenen Kreises 3

Zweiter Abschnitt.

Von den Winkeln der Nebendreiecke, der Lage ihrer Seiten und den Mittelpunkten ihrer umschriebenen Kreise 9

Dritter Abschnitt.

Gleiche Strecken, deren Lage und daraus entspringende Gesetze 16

Vierter Abschnitt.

Proportionen und Flächeninhalte 26

Schlussbemerkung 32

Aufgaben 33

Bestimmungen und Erklärungen.

(Figur auf der Tafel.)

In jedem beliebigen Dreiecke ABC heissen die Fusspunkte der Höhen h', h'', h''' in a, b, c oder deren Verlängerungen in derselben Reihenfolge F', F'', F''', die Berührungspunkte des eingeschriebenen Kreises T', T'', T''', die Durchschnittspunkte durch die Halbirungslinie des gegenüberliegenden Winkels Z', Z'', Z''' und die Halbirungspunkte in denselben H', H'', H'''. Der Durchschnittspunkt der Höhen heisst D, der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises M', der des umschriebenen M'' und der desjenigen Kreises, dessen Peripherie durch die Mittelpunkte der drei angeschriebenen Kreise geht, M'''. Der Radius des umschriebenen Kreises ist R, der des eingeschriebenen r und die der an a, b, c angeschriebenen Kreise r', r'', r'''. t ist die Tangente, die von irgend einer Dreiecksspitze an den dieser Spitze gegenüberliegenden angeschriebenen Kreis geht, t' ist die Tangente, welche von A aus, t'' die, welche von B aus, und t''' die, welche von C aus an den eingeschriebenen Kreis geht.

Wenn man nun a, b, c nach beiden Richtungen verlängert und alle dadurch entstehenden Winkel halbirt, so schneiden sich die Halbirungslinien in den Mittelpunkten der 4 Berührungskreise, indem jede Halbirungsgerade durch 2 dieser Mittelpunkte geht, und es entstehen so innerhalb wie ausserhalb des Dreiecks ABC 3 Dreiecke, welche alle 6 zur Grundlinie a, b oder c, die inneren zur gegenüberliegenden Spitze den Mittelpunkt des eingeschriebenen, die äusseren den Mittelpunkt der an ihre Grundlinien angeschriebenen Kreise haben. Die inneren heissen die innen angeschriebenen Dreiecke und werden, je nachdem sie an a, b oder c angeschrieben sind, durch Δ_a, Δ_b und Δ_c bezeichnet; die äusseren heissen die aussen angeschriebenen Dreiecke und werden, je nachdem sie an a, b oder c angeschrieben sind, durch Δ_1, Δ_2 und Δ_3 bezeichnet. In Δ_1 heisst die a gegenüberliegende Spitze A', die

Fusspunkte der Höhen, die von A', B, C ausgehen, A_1, B_1, C_1, der Höhendurchschnittspunkt D'; in Δ_2 heisst die b gegenüberliegende Spitze B'', die Fusspunkte der Höhen, die von B'', A, C ausgehen, B_2, A_2, C_2, der Höhendurchschnittspunkt D''; in Δ_3 heisst die c gegenüberliegende Spitze C''', die Fusspunkte der Höhen, die von C''', A, B ausgehen, C_3, A_3, B_3, der Höhendurchschnittspunkt D'''. Den andern Höhen gegenüber heissen in Δ_1, Δ_2, Δ_3 die Höhen $A'A_1$, $B''B_2$ und $C'''C_3$ die Radienhöhen. — $\Delta A'B''C'''$ ist das umschriebene Dreieck. $\Delta T'T''T'''$ heisst das innere Berührungsdreieck. Die 3 Dreiecke, welche dadurch entstehen, dass man die Berührungspunkte je eines der 3 äusseren Berührungskreise durch Gerade verbindet, heissen die äusseren Berührungsdreiecke. Eines dieser Dreiecke, das nämlich für Kreis A', ist in der Figur gezeichnet, es ist $\Delta A_1 \alpha_{1_b} \alpha_{1_c}$ (sprich $A_1 \alpha_1$ in b α_1 in c).

Die 3 Dreiecke $\Delta A_1 B' C'$, $\Delta B_2 A'' C''$, $\Delta C_3 A''' B'''$, welche dadurch entstehen, dass man in jedem aussen angeschriebenen Dreiecke vom Fusspunkte der Radiushöhe Perpendikel auf die beiden andern Höhen fällt und deren Fusspunkte verbindet, heissen (bis ein bezeichnenderer Name gefunden wird) die kleinen Nebendreiecke.

All diesen Nebendreiecken gegenüber heisst ΔABC das Hauptdreieck.

Alle Kreise, die in dieser Figur in Betracht gezogen werden, lassen sich in einen Ausdruck fassen: es sind nämlich die umschriebenen Kreise des Hauptdreiecks und aller Nebendreiecke, die Mittelpunkte dieser Kreise für Δ_1, Δ_2, Δ_3 heissen O', O'', O'''.

Die ganze Figur heisst die allgemeine Figur. Die Begründung dieser Benennung wurde in der Vorrede ausgesprochen.

Ausser den bereits durch Buchstaben in ihrer Benennung festgestellten Punkten werden auch noch andere zu bezeichnen sein, was durch das kleine griechische Alphabet geschehen wird.

Die Winkel des Hauptdreiecks heissen nach ihren Scheiteln $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, oder, wenn eine Verwechselung mit den Punkten unmöglich wird, kurzweg A, B, C.

Erster Abschnitt.

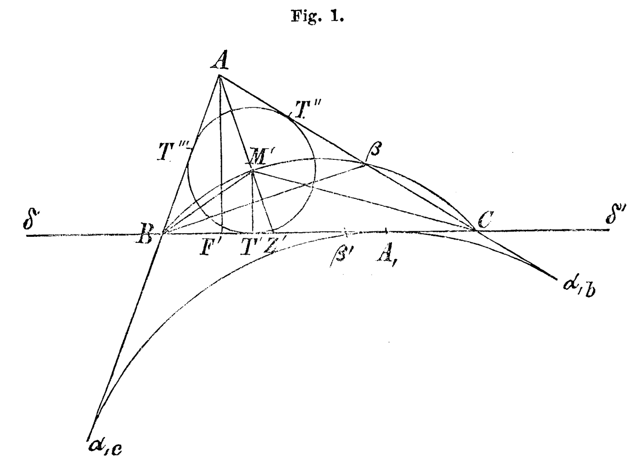
Das arithmetische Verhältniss der Dreiecksseiten in der Form $\frac{a+b-c}{2}$, das arithmetische Verhältniss der Dreieckswinkel in der Form $\frac{A+B-C}{2}$ und die Beziehungen der Höhen zu den Mittelpunkten der Berührungskreise und dem des umschriebenen Kreises.

1. Die Summe der Differenz zweier Dreiecksseiten und der doppelten kleineren Tangente des inneren oder äusseren Berührungskreises in der dritten Seite ist der dritten Seite gleich.

a) Beweis für den inneren Kreis. Macht man $A\beta = AB$ und $C\beta' = C\beta$, so ist $BT''' = T''\beta = \beta' T'$. Da aber auch $BT''' = BT'$, so ist $BT' = T'\beta'$, folglich ist $BC = 2BT' + \beta C$ $= 2BT' + (b - c)$. Hieraus geht die Formel hervor für BT' oder

$$t'' = \frac{a - (b - c)}{2} = \frac{a + c - b}{2}.$$

Fig. 1.



Ebenso für $t' = \frac{b + c - a}{2}$ und für $t''' = \frac{a + b - c}{2}$.

b) Beweis für den äusseren Berührungskreis. Wird an a der äussere Berührungskreis angeschrieben, so ist $A a_{1_c}$, also $t = \frac{a + b + c}{2}$; zieht man hievon a ab, so bleibt $\frac{b + c - a}{2} = t'$, d. h. AT'''. Es ist also $T''' a_{1_c} = BC$; da aber $B a_{1_c} = BA_1$, so ist $A_1 C = BT''' = BT'$, und weil $a = 2BT' + b - c$, so ist auch $a = 2A_1 C + b - c$, was zu beweisen war.

Constructionserklärung. Will man durch die Dreiecksseiten allein in denselben die Berührungspunkte des inneren und äusseren Berührungskreises, in a also T' und A_1 finden, so muss man von dem Ende von a, an welches die grössere der beiden andern Seiten stösst, weil hier der kleinere Winkel an a liegt, von welchem also die grössere Tangente an den inneren Kreis ausgeht, die Differenz von b und c abtragen. Der Halbirungspunkt des Restes ist dann T'. Gleicherweise, weil $\sphericalangle A_1 B a_{1_c}$ (als Supplementwinkel des grösseren Dreieckswinkels an a) kleiner ist, als der Supplementwinkel des an a liegenden kleineren Winkels, nämlich $\sphericalangle A_1 C a_{1_b}$, muss die Abtragung der Differenz von dem Ende von a ausgehen, an welchem der grössere Winkel an a liegt, um durch Halbirung des Restes A_1 zu finden.

Zweite Construction. Verlängert man nach beiden Seiten a um die Differenz von b und c und halbirt a, um eine Differenz auf der einen Seite verlängert, und halbirt auch a, um die Differenz auf der andern Seite verlängert, so fallen die Halbirungspunkte in T' und A_1.

Beweis. Ist $B\delta = C\delta' = b - c$, so ist $\delta C = B\delta' = a + b - c$ und $\frac{\delta C}{2} = \frac{B\delta'}{2} = \frac{a+b-c}{2}$. Zieht man hievon $b - c$ ab, so bleibt $\frac{a-b+c}{2} = BT' = CA_1$. Es ist demnach $\delta T'$ die Hälfte von δC und $\delta' A_1$ die Hälfte von $B\delta'$.

Zusatz 1. Die Inhaltsformel des Dreiecks ABC ist $J = \sqrt{t.t'.t''.t'''}$.

Beweis. $J = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}$. Es ist aber $\frac{a+b+c}{2} = t$, $\frac{b+c-a}{2} = t'$, $\frac{a+c-b}{2} = t''$ und $\frac{a+b-c}{2} = t'''$.

Zusatz 2. Das Produkt der mittlern geometrischen Proportionalen der beiden beliebig paarweise genommenen 4 Tangenten ist gleich dem Inhalte des Dreiecks.

Beweis. $J = \sqrt{t.t'.t''.t'''} = \sqrt{t.t'} \cdot \sqrt{t''.t'''}$. Es ist aber $\sqrt{t.t'}$ die mittlere geometrische Proportionale von t und t' und ebenso $\sqrt{t''.t'''}$ die von t'' und t'''.

2. Die Strecke in jeder Dreiecksseite, die zwischen den Berührungspunkten des inneren und äusseren Berührungskreises liegt, ist gleich der Differenz der beiden andern Dreiecksseiten.

Der Beweis geht aus den Beweisen des Lehrsatzes 1 hervor, dem ohngeachtet wurde dieser Satz seiner allzu grossen Wichtigkeit wegen nicht als Zusatz gebracht.

Zusatz. Die Strecke zwischen den Berührungspunkten des inneren und äusseren Berührungskreises in der metrisch mittleren Dreiecksseite ist so gross wie die Summe dieser Strecken in der grössten und kleinsten Dreiecksseite.

Beweis. $a - b + b - c = a - c$, folglich ist (allg. Fig.) $T'' B_2 = T' A_1 + T''' C_3$.

Anmerkung. Von der Lage der Tangenten ein Mehreres und den daraus entspringenden Gesetzen zu sprechen, würde hier zu weit abführen. Dies wird im dritten Abschnitte geschehen.

3. Der Kreisbogen, der durch die Endpunkte einer Dreiecksseite und M' geht, schneidet von der grösseren der beiden anderen Dreiecksseiten ihre Differenz ab.

Beweis. (Fig. 1.) $\sphericalangle BM'C = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}$. Es ist aber als Aussenwinkel des gleichschenklichen Dreiecks $AB\beta$ auch $\sphericalangle B\beta C = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}$, folglich stehen beide Winkel auf demselben Kreisbogen. Es geht also Bogen $BM'C$ durch β und βC ist die Differenz von b und c.

4. Setzt man auf eine Dreiecksseite **den** Bogen, welcher der geometrische Ort für den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises ist, und trägt von demselben von dem Ende, wo sich der kleinere Winkel an dieser Seite befindet, die Differenz dieser beiden Winkel ab und halbirt den Rest, so ist der Halbirungspunkt der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises.

Beweis. (Fig. 1.) Nach Lehrsatz 3 geht Bogen $BM'C$ durch β; $\sphericalangle \beta BC$ ist aber $\frac{B-C}{2}$, folglich Bogen $C\beta = B - C$, die abzutragende Differenz. $M'C$ halbirt aber C, folglich auch den Bogen $BM'\beta$, auf welchem C steht.

5. Die Gerade, unter dem Winkel der halben Differenz der Winkel an der Grundlinie an die Spitze*) ihrer Höhe nach derjenigen Seite hin angetragen, wo sich an der Grundlinie der kleinere Winkel befindet, geht durch die Mittelpunkte des inneren und desjenigen äusseren Berührungskreises, welcher an die Grundlinie angeschrieben ist.

Beweis. (Fig. 1.) Zieht man die Gerade AZ', so geht dieselbe durch den Mittelpunkt des inneren und, wenn man sie verlängert, durch den Mittelpunkt des äusseren Berührungskreises. Nach dem Lehrsatze müsste also $\sphericalangle Z'AF' = \frac{B-C}{2}$ sein. Es ist nun $\sphericalangle AZ'B = C + \frac{A}{2}$, folglich $\sphericalangle T'M'Z' = \frac{B-C}{2}$, und da $AF' \,||\, M'T'$, so ist auch $\sphericalangle F'AZ' = \frac{B-C}{2}$.

Zusatz. (Siehe allg. Fig.) Weil $AF' \,||\, A'A_1$, so ist auch $\sphericalangle AA'A_1 = \frac{B-C}{2}$.

6. Wenn man die Differenz zweier Dreieckswinkel (A und C) mit ihrem Scheitel so in oder über den dritten Winkel B legt, dass ein Schenkel der Differenz auf denjenigen Schenkel von B fällt, welchen er mit A, dem **grösseren** der beiden andern, gemein hat und man halbirt den Winkel, der zwischen den nicht

---

*) Ist dieser Ausdruck auch nicht gäng und gäbe, so möge man ihn doch gestatten. Jedenfalls ist er so anschaulich und bezeichnend, wie „Fusspunkt“ der Höhe, „Schenkel“ und „Scheitel“ des Winkels, „Bogen“ etc.

auf einander liegenden Schenkeln der Differenz und des dritten Winkels B liegt, nämlich $\sphericalangle CB\delta$, so geht die Halbirungslinie BM'' durch den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises.

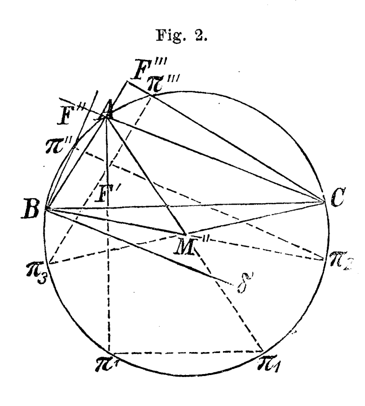


Fig. 2.

Beweis. (Fig. 2.) Macht man $\sphericalangle BCM'' = \sphericalangle CBM''$, so ist nach der Construction $\sphericalangle CBM'' = \sphericalangle BCM'' = \frac{B-(A-C)}{2}$. Weil aber $\sphericalangle CBM''$ ausserhalb des $\sphericalangle B$ liegt, so ist $\sphericalangle \frac{B-(A-C)}{2}$ negativ, der positiv $\frac{(A-C)-B}{2}$ heisst. Deshalb ist der hohle $\sphericalangle BM''C = 2B+2C$ und der erhabene $\sphericalangle BM''C = 2A$. Weil aber letzterer Winkel doppelt so gross ist, wie A, und $M''B = M''C$, so ist M'' der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises von ΔABC.

2. Beweis. Beschreibt man um ΔABC einen Kreis und zieht die Geraden $M''A$, $M''B$ und $M''C$, so ist $\sphericalangle AM''B = 2C$ und $\sphericalangle AM''C = 2B$, folglich $\sphericalangle BM''C = 2B + 2C$ und deshalb $\sphericalangle CBM'' = \frac{A-B-C}{2}$, im negativen Ausdruck $= \frac{B+C-A}{2} = \frac{B-(A-C)}{2}$, welcher Ausdruck die Form darstellt, welche der Lehrsatz angibt.

Es ist deshalb bei a die Formel für den Winkel, den der Radius, welcher an ein Ende von a gezogen wird, mit a macht, $\frac{B+C-A}{2}$. Ist $A < B + C$, so ist er natürlich positiv und wird innerhalb des Dreiecks angetragen; ist $A = B + C$, so ist er 0, und M'' fällt in die Hypothenuse; ist $A > B + C$, so ist er negativ und muss ausserhalb des Dreiecks angetragen werden. Ebenso heisst die Formel für diesen Winkel bei b $\frac{A+C-B}{2}$ und $\frac{A+B-C}{2}$ bei c. Es ist aber auch $\frac{B+C-A}{2} = 90^\circ - A$, $\frac{A+C-B}{2} = 90^\circ - B$ und $\frac{A+B-C}{2} = 90^\circ - C$.

7. Die Gerade, unter dem Winkel der Differenz der Winkel an der Grundlinie an die Spitze ihrer Höhe nach derjenigen Seite hin angetragen, wo sich an der Grundlinie der kleinere Winkel befindet, geht durch den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises. (Vergleiche hiemit Lehrsatz 5.)

Beweis. (Fig. 2.) Durch $\sphericalangle A$ und die $\Delta\Delta\, BF''A$ und $CF'''A$ lässt es sich berechnen, dass $\sphericalangle ABF'' = \sphericalangle ACF''' = \sphericalangle CBM'' = \sphericalangle BCM''$. Dies soll aber auch rein geometrisch dargethan werden. Verlängert man BM'' bis an die Peripherie und nennt diesen Punkt π_2 und verlängert CM''

bis an die Peripherie und nennt diesen Punkt π_3, den Durchschnittspunkt von BF'' und der Peripherie π'', den Durchschnittspunkt von CF''' und der Peripherie π''' und verbindet π'' mit π_2 und π''' mit π_3, so ist, weil $B\pi_2$ ein Durchmesser, $\sphericalangle B\pi''\pi_2 = 90^\circ$, folglich $\pi''\pi_2 \parallel F''C$ und deshalb Bogen $A\pi'' =$ Bogen $C\pi_2$. Ebenso ist $\pi'''\pi_3 \parallel F'''B$, folglich Bogen $A\pi''' =$ Bogen $B\pi_3$. Da aber Bogen $C\pi_2 =$ Bogen $B\pi_3$, so sind alle 4 Bogen und die auf ihnen stehenden Peripheriewinkel gleich. Da nun, weil negativ, $\sphericalangle CBM'' = \frac{A-B-C}{2}$, so ist

$$\sphericalangle F''BM'' = B + 2\left(\frac{A-B-C}{2}\right) = A - C \text{ und}$$

$$\sphericalangle F'''CM'' = C + 2\left(\frac{A-B-C}{2}\right) = A - B.$$

Es bleibt deshalb nur noch zu beweisen, dass $\sphericalangle F'AM'' = B - C$. Es ist aber $\sphericalangle M''AB = \frac{A+B-C}{2}$ und $\sphericalangle F'AM''$ ist $= \sphericalangle M''AB - \sphericalangle F'AB$ $= \frac{A+B-C}{2} - \frac{A+C-B}{2} = B - C$.

Zusatz 1. Die Differenz des grössten und kleinsten Dreieckswinkels oder, anders ausgedrückt, die Differenz, die im Scheitel des mittleren Dreieckswinkels nach der Weise, wie es der Lehrsatz ausspricht, an die Höhe gelegt wird, ist so gross, wie die Summe der Differenz des grössten und mittleren und der Differenz des mittleren und kleinsten Dreieckswinkels.

Beweis. (Fig. 2.) $A - B + B - C = A - C$, folglich ist

$$\sphericalangle F''BM'' = \sphericalangle F'''CM'' + \sphericalangle F'AM''.$$

Zusatz 2. Der Winkel, den eine Dreieckshöhe an ihrer Spitze mit einer der beiden Dreiecksseiten bildet, ist gleich dem Winkel, den die andere Dreiecksseite mit der Geraden bildet, welche vom Mittelpunkte des umschriebenen Kreises nach der Spitze dieser Dreieckshöhe gezogen wird.

Beweis. (Fig. 2.) Für h'' und h''' selbstverständlich durch den Beweis des Hauptsatzes, bleibt der Beweis für h' noch zu führen. — Man verlängere AF', bis sie die Peripherie in π' und AM'', bis sie die Peripherie in π_1 trifft, so ist wiederum $\pi'\pi_1 \parallel BC$ und Bogen $B\pi' =$ Bogen $C\pi_1$, folglich $\sphericalangle BA\pi' = \sphericalangle CA\pi_1$, und deshalb auch $\sphericalangle F'AC = \sphericalangle M''AB$.

Zusatz 3. $\triangle \pi'\pi''\pi''' \cong \triangle \pi_1\pi_2\pi_3 \cong \triangle ABC$.

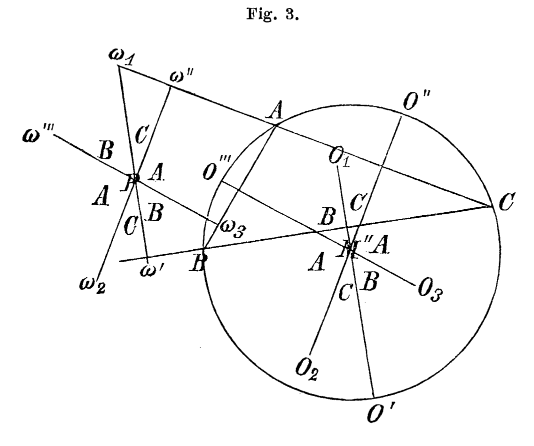
Zusatz 4. AA' geht durch O', BB'' durch O'' und CC''' durch O'''.

Beweis. (Allg. Fig.) Nach 5 ist $\sphericalangle A_1A'A = \sphericalangle T'M'A' = \frac{B-C}{2} =$ der Differenz von $\sphericalangle A'CB$ und $\sphericalangle A'BC$.

8. Die 6 Winkel, die dadurch erzeugt werden, dass man von einem beliebigen Punkte P in der Ebene eines Dreiecks Perpendikel auf dessen Seiten oder deren Verlängerungen fällt und

diese Perpendikel rückwärts verlängert, sind paarweise den Dreieckswinkeln gleich.

Fig. 3.



Beweis. (Fig. 3.) Man beschreibe um ΔABC einen Kreis und fälle von M'' aus auf dessen Seiten Perpendikel, die man über ihre Fusspunkte bis an die Peripherie, bis O', O'', O''' und rückwärts beliebig bis O_1, O_2, O_3 verlängert, dann ist, weil $M''O'$ Bogen $BO'C$ und $M''O''$ Bogen $CO''A$ halbirt, Bogen

$$O'CO'' = A + B\text{, folglich}$$
$$\sphericalangle\, O'M''O_2 = \sphericalangle\, O''M''O_1 = C.$$

Ebenso ist Bogen $O'BO''' = A + C$, folglich $\sphericalangle O'''M''O_2 = \sphericalangle O''M''O_3 = A$ und deshalb nothwendigerweise $\sphericalangle\, O'M''O_3 = \sphericalangle\, O'''M''O_1 = B$. Wo aber auch der Punkt P in der Ebene des Dreiecks liege, immer wird, weil senkrecht auf a, $O'O_1 \parallel \omega'\omega_1$, ebenso $O''O_2 \parallel \omega''\omega_2$ und $O'''O_3 \parallel \omega'''\omega_3$ sein und dadurch die Winkel um P denen um M'' gleich sein.

2. Beweis. Im Viereck $P\omega''A\omega_3$ sind die Winkel bei ω'' und ω_3 rechte, folglich ist $\sphericalangle\, \omega''P\omega_3 = A$, weil $\sphericalangle\, \omega''A\omega_3$ der Supplementwinkel von A ist. Ebenso ist im Viereck $\omega'P\omega_3B$ $\sphericalangle\, \omega'P\omega_3 = B$, folglich $\sphericalangle\, \omega''P\omega_1 = C$. Die andern Winkel sind aber Scheitelwinkel dieser 3 Winkel.

Zusatz 1. Da Punkt P in der Ebene des Dreiecks beliebig ist, so sind auch die Winkel um den Höhendurchschnittspunkt D dieselben.

Zusatz 2. Die 6 Winkel um P behalten dieselbe Grösse, wenn man von ihm Perpendikel auf die Höhen des Dreiecks fällt und rückwärts verlängert.

Zusatz 3. Die Folge der Winkel A, B, C im Dreieck hat eine entgegengesetzte Richtung, als die Folge der Winkel A, B, C um P. (M'' ist in diesem Satze auch als P, d. h. als ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks zu betrachten.)

Zweiter Abschnitt.

Von den Winkeln der Nebendreiecke, der Lage ihrer Seiten und den Mittelpunkten ihrer umschriebenen Kreise.

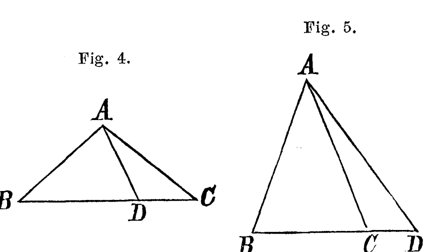
Vorbemerkung. Da die Summe der Supplementwinkel der drei Dreieckswinkel 360° ist, so sind die halben Supplementwinkel die Winkel eines Dreiecks. — Der Complementwinkel eines halben Supplementwinkels eines beliebigen Winkels A ist $\frac{A}{2}$.

9. Die aussen angeschriebenen Dreiecke ($\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$), das umschriebene und das innere Berührungsdreieck sind einander ähnlich und ihre Winkel sind gleich den halben Supplementwinkeln der Winkel des Hauptdreieckes ABC.

Beweis. (Allg. Fig.) Nach der Construction der allgemeinen Figur ist in $\varDelta_1$ $\sphericalangle A'BC$ der halbe Supplementwinkel von B, $\sphericalangle A'CB$ der halbe Supplementwinkel von C, folglich $\sphericalangle BA'C$ der halbe Supplementwinkel von A. Ferner ist in dem gleichschenklichen Dreiecke $BT'T'''$ $\sphericalangle BT'T'''$ auch der halbe Supplementwinkel von B, folglich ist $T'T''' \parallel BA'$. Ebenso ist $T'T'' \parallel CA'$. Im $\varDelta_2$ ist aber auch $\sphericalangle B''AC$, wie auch in dem gleichschenklichen $\varDelta AT''T'''$ $\sphericalangle AT''T'''$ der halbe Supplementwinkel von A, folglich $T''T''' \parallel AB''$. Da nun schliesslich das umschriebene Dreieck mit $\varDelta_1$ den $\sphericalangle C'''A'B'''$, mit $\varDelta_2$ den $\sphericalangle A'B''C'''$ und mit $\varDelta_3$ den $\sphericalangle B''C'''A'$, d. h. den halben Supplementwinkel von A, B und C gemeinschaftlich hat und die Seiten von $\varDelta T'T''T'''$ mit den Seiten von $\varDelta A'B''C'''$ parallel laufen, so sind alle 5 Dreiecke einander ähnlich.

Zusatz 1. Der kleinste, mittlere und grösste Winkel im Hauptdreieck steht in derselben Reihenfolge dem grössten, mittlern und kleinsten Winkel im umschriebenen Dreiecke gegenüber.

Zusatz 2. (Fig. 4 und 5.) Wenn man in einem gleichschenklichen Dreiecke ABC mit der Grundlinie BC die Strecke $BD = AB$ macht, so ist das $\varDelta ABD$ ein den aussen angeschriebenen Dreiecken ähnliches Dreieck.



10. Die kleinen Nebendreiecke sind den aussen angeschriebenen Dreiecken ähnlich.

Beweis. (Allg. Fig.) Da Punkt A_1 in der Ebene von $\varDelta A'BC$ liegt, die Geraden BC, A_1B' und A_1C' senkrecht auf den Höhen von $\varDelta_1$ stehen,

so sind nach 8, Zusatz 2 $\sphericalangle BA_1B'$, $\sphericalangle B'A_1C'$ und $\sphericalangle C'A_1C$ gleich den Dreieckswinkeln von Δ_1. Da man aber um Viereck $A_1B'D'C'$ einen Kreis beschreiben kann, in welchem der Durchmesser $D'A_1 \perp BC$, so ist als Berührungswinkel $\sphericalangle BA_1B' = \sphericalangle A_1C'B' = \sphericalangle A'CB$ (letzteres, weil $A_1B' \perp BB_1$ und $BB_1 \perp A'C$, folglich $A_1B' \parallel A'C$) und $\sphericalangle CA_1C' = \sphericalangle A_1B'C' = \sphericalangle A'BC$ und somit schliesslich $\sphericalangle B'A_1C' = \sphericalangle BA'C$.

Zusatz 1. In diesen 8 ähnlichen Nebendreiecken sind alle Winkel, die ihren Scheitel in A mit oder ohne nähere Bezeichnung oder in T' haben, $= \frac{B+C}{2}$; die ihn ebenso in B oder T'' haben, $= \frac{A+C}{2}$ und die ihn ebenso in C oder T''' haben, $= \frac{A+B}{2}$.

Zusatz 2. Diese 8 ähnlichen Nebendreiecke sind spitzwinklich.

Beweis. Jeder Winkel in diesen Dreiecken ist ein halber Supplementwinkel, folglich kleiner als 90°.

11. In dem inneren Berührungs-, dem umschriebenen und den kleinen Nebendreiecken laufen die correspondirenden Seiten parallel, und zwar, von dem Scheitel der gleichen Winkel ausgehend, bei den beiden ersten Dreiecken in gleicher, bei den kleinen Nebendreiecken in entgegengesetzter Richtung.

Beweis. Der Beweis für die parallele Lage aus Beweis 9 und 10. — Bringt man das auf BC stehende Perpendikel $A'A_1$ mit dem daran hängenden $\Delta A_1B'C'$ mit seinem Punkte A_1 nach T', so wird $\sphericalangle B'A_1C'$ ein Scheitelwinkel von $\sphericalangle T''T'T'''$, es haben also A_1B' und $T'T''$, wie auch A_1C' und $T'T'''$ von A_1 und T' die entgegengesetzte Richtung. Ebenso wird es für das umschriebene Dreieck bewiesen, wenn man an A_1A' das $\Delta A_1B'C'$ herunterlaufen lässt, dass A_1 in A' fällt.

12. In jedem aussen angeschriebenen Dreiecke laufen die angeschriebenen Seiten (in Δ_1 $A'B$ und $A'C$) mit den beiden, den gleichen Winkel, wie jene, einschliessenden, **nicht** correspondirenden Seiten in den andern 5 ähnlichen Dreiecken parallel (also $A'B \parallel T'T''' \parallel A_1C'$ und $A'C \parallel T'T'' \parallel A_1B'$). Die dritte Seite aber läuft mit den dritten Seiten der andern 5 Dreiecke antiparallel (also BC antiparallel zu $T''T'''$ und $B'C'$ etc.).

Beweis. Weil in den $\Delta\Delta\, A'BC$ und $A'B''C'''$ mit dem gemeinschaftlichen Winkel im Scheitel A' die beiden andern gleichen Winkel in den verschiedenen Dreiecken an verschiedenen Schenkeln des gemeinschaftlichen Winkels liegen, so ist BC antiparallel zu $B''C'''$ und zu allen Seiten im inneren Berührungs- und in den kleinen Nebendreiecken, die mit $B''C'''$ parallel laufen, also zu $T''T'''$, $B'C'$, B_2C'' und C_3B'''. Weil aber $A'B$ in $A'C'''$ liegt, während sie die mit $A'B''$ correspondirende Seite ist, und $A'C$ in

$A'B''$ liegt, während sie die mit $A'C'''$ correspondirende Seite ist, so ist $A'B \,||\, T'T''' \,||\, A_1C' \,||\, A''C'' \,||\, A'''C_3$ und $A_1C \,||\, T'T'' \,||\, A_1B' \,||\, A''B_2 \,||\, A'''B'''$.

Zusatz 1. Keine Seite in Δ_1, Δ_2, Δ_3 läuft mit der mit ihr correspondirenden Seite in den andern 5 ähnlichen Nebendreiecken parallel.

Zusatz 2. Die Neigung der dritten antiparallelen Seiten ist bei Δ_1 die halbe Differenz von B und C, bei Δ_2 die halbe Differenz von A und C und bei Δ_3 die halbe Differenz von A und B.

Beweis durch Ausrechnung.

13. Das an eine Dreiecksseite innen angeschriebene Dreieck ist dem äusseren Berührungsdreiecke an derselben Seite ähnlich. In beiden Dreiecken ist die vom Scheitel des grössten Winkels ausgehende grössere Seite mit der vom Scheitel des gleichen Winkels im anderen Dreiecke ausgehenden kleineren Seite parallel; die dritten Seiten sind antiparallel.

Beweis. (Allg. Fig.) Man betrachte diese Dreiecke an a, nämlich $\Delta\, M'BC$ und $\Delta\, A_1\alpha_{1_b}\alpha_{1_c}$. — $\Delta\, A\alpha_{1_b}\alpha_{1_c}$, ist ein gleichschenkliches, weil $A\alpha_{1_b} = A\alpha_{1_c} = t$ ist, folglich $\sphericalangle\, A\alpha_{1_b}\alpha_{1_c} = \frac{B+C}{2}$. Ferner ist, weil als Tangenten $CA_1 = C\alpha_{1_b}$, auch $\Delta\, CA_1\alpha_{1_b}$ gleichschenklich, folglich $\sphericalangle\, C\alpha_{1_b}A_1 = \frac{C}{2}$ und somit $\sphericalangle\, A_1\alpha_{1_b}\alpha_{1_c} = \frac{B}{2} = \sphericalangle\, M'BC$ im Δ_a. Ebenso ist $\sphericalangle\, A_1\alpha_{1_c}\alpha_{1_b} = \frac{C}{2} = \sphericalangle\, M'CB$ in Δ_a, folglich $\sphericalangle\, \alpha_{1_b}A_1\alpha_{1_c} = \sphericalangle\, BM'C = A + \frac{B+C}{2}$; somit die Aehnlichkeit bewiesen. Ferner ist $\sphericalangle\, M'CB = \sphericalangle\, CA_1\alpha_{1_b}$, folglich $M'C \,||\, A_1\alpha_{1_b}$ und ebenso $M'B \,||\, A'\alpha_{1_c}$. Weil aber in beiden Dreiecken die gleichen Winkel an BC und $\alpha_{1_b}\alpha_{1_c}$ an verschiedenen Parallelen liegen, so sind diese Seiten antiparallel.

14. Der Winkel, welcher zwischen einem der Schenkel des grössten Winkels eines äusseren Berührungsdreieckes und der **nächsten**, von dem Scheitel dieses Winkels ausgehenden Seite eines kleinen Nebendreieckes liegt, ist, wenn dieser Scheitel in a, b oder c fällt, in derselben Reihenfolge $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ oder $\frac{C}{2}$ (also bei a $\sphericalangle\, \alpha_{1_b}A_1C' = \sphericalangle\, \alpha_{1_c}A_1B' = \frac{A}{2}$).

Beweis. $\sphericalangle\, CA_1C' = \frac{A+C}{2}$, $\sphericalangle\, CA_1\alpha_{1_b} = \frac{C}{2}$, folglich $\sphericalangle\, \alpha_{1_b}A_1C' = \frac{A}{2}$. Ferner $\sphericalangle\, BA_1B' = \frac{A+B}{2}$, $\sphericalangle\, BA_1\alpha_{1_c} = \frac{B}{2}$, folglich $\sphericalangle\, \alpha_{1_c}A_1B' = \frac{A}{2}$.

Weitere Betrachtungen. Als Complementwinkel zu $\sphericalangle\, CA_1C'$ ist $\sphericalangle\, C'A_1D' = \frac{B}{2}$, folglich $\sphericalangle\, B'A_1D' = \frac{C}{2}$, somit ist die Reihenfolge der Winkel $\sphericalangle\, CA_1\alpha_{1_b}$, $\sphericalangle\, \alpha_{1_b}A_1C'$, $\sphericalangle\, C'A_1D'$, $\sphericalangle\, D'A_1B'$, $\sphericalangle\, B'A_1\alpha_{1_c}$ und

$\sphericalangle \alpha_{1_c} A_1 B$ in ihren Werthen ausgedrückt: $\frac{C}{2}$, $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$, $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$. Die Schenkel dieser Winkel aber sind von A_1 aus die Perpendikel auf die Seiten des $\Delta A'BC$, nämlich $A'A_1$, $A_1\alpha_{1_b}$ und $A_1\alpha_{1_c}$, und die Perpendikel auf die Höhen desselben Dreiecks, nämlich BC, A_1B' und A_1C'. Hieraus geht folgender Satz hervor:

15. Wenn man von irgend einem Punkte in der Ebene eines spitzwinklichen Dreiecks Perpendikel auf die Seiten des Dreiecks oder deren Verlängerungen und auf dessen Höhen oder deren Verlängerungen fällt und rückwärts verlängert, so entstehen 12 Winkel, von denen immer 4 gleich den Complementwinkeln der Dreieckswinkel sind und deren Reihenfolge um diesen Punkt die **gleiche** ist, wie die Reihenfolge der Dreieckswinkel, zu denen sie die Complemente sind.

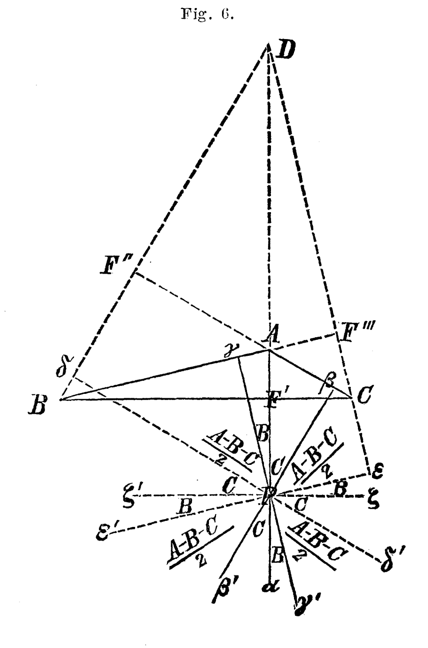
Vergleiche hiemit 8 und 8 Zusatz 2 und 3.

Zusatz 1. Beim rechtwinklichen Dreiecke bilden sich nur 8 Winkel, es fallen nämlich die Complementwinkel zum rechten Winkel, weil sie 0 sind, aus. Die 8 Winkel sind, wenn A der rechte ist, B und C, welche abwechselnd auf einander folgen.

Zusatz 2. Im stumpfwinklichen Dreiecke mit dem stumpfen Winkel A sind die 4 mal um P sich bildenden Winkel B, C und $\frac{A-B-C}{2}$ und ist dies ihre Folge, so ist sie wieder die entgegengesetzte von B, C, A im Dreieck.

Beweis. (Fig. 6.) Beschreibt man über BC des Dreiecks ABC das Dreieck DBC (D der Höhendurchschnittspunkt), so werden für ΔABC und für ΔDBC um P dieselben Winkel erzeugt, denn in beiden Dreiecken sind BC und DF' gemeinschaftlich, die verlängerten Seiten AB und AC werden in ΔDBC zu Höhen, während die auf diesen Seiten verlängerten Höhen zu Seiten des ΔDBC werden. (P liege in der Verlängerung von DF'.) Weil (man betrachte das rechtwinkliche $\Delta CF''B$) C der Complementwinkel von $\sphericalangle DBC$, und ebenso B der Complementwinkel von $\sphericalangle DCB$, so müssen diese Winkel um P ungetheilt bleiben. Weil nun aber auch $P\gamma \perp AB$ und $P\delta \perp BD$, so ist $\sphericalangle \gamma P\delta = \sphericalangle DBA$. A ist aber als Aussenwinkel vom $\Delta AF''B = DBA +$

Fig. 6.



einem rechten Winkel, folglich $\sphericalangle DBA$ positiv gleich dem Complementwinkel von A. Es ist aber auch $B + C + \sphericalangle DBA$ (betrachte $\Delta CF''B$) gleich einem rechten Winkel, folglich ist $\sphericalangle \gamma P\delta = \sphericalangle ABD = \frac{A-B-C}{2}$. Schliesslich ist, weil die Winkel $\beta PF'$ und $F'P\gamma$ nur durch die Perpendikel aus P auf die Seiten gebildet werden, auch die Reihenfolge der Winkel um P nach 8 Zusatz 3 eine dem Winkel im Dreieck entgegengesetzte.

Fassung für jedes Dreieck. Wenn man von der Summe zweier neben einander liegenden Dreieckswinkel um P das Complement des dritten Winkels von beiden Seiten abzieht, so erhält man die Grösse der viermal wiederkehrenden Winkel um P. Weil aber das Complement von $90^\circ = 0$ und von einem stumpfen Winkel negativ ist, folglich ausserhalb der Summe der beiden spitzen Winkel fällt, bleiben im rechtwinklichen, wie im stumpfwinklichen Dreiecke die spitzen Winkel um P ungetheilt. Hierdurch wird auch die Nothwendigkeit der verschiedenen Reihenfolge der Winkel um P klar.

16. (Hülfslehrsatz.) Die Halbirungslinie eines Dreieckswinkels steht senkrecht auf derjenigen Seite des umschriebenen Dreiecks, welche durch den Scheitel dieses Winkels geht.

Beweis. (Allg. Fig.) $\sphericalangle A'BC$ ist der halbe Supplementwinkel von B, folglich ist der Complementwinkel zu $\sphericalangle A'BC = \frac{B}{2}$ und somit $\sphericalangle M'BA' = 90^0$.

Zusatz 1. Die Fusspunkte der Höhen im umschriebenen Dreieck sind A, B und C und ΔABC ist somit das Höhendreieck des umschriebenen Dreiecks.

Zusatz 2. Die Höhendreiecke in Δ_1, Δ_2, Δ_3, $\Delta T'T''T'''$ und in den kleinen Nebendreiecken sind dem ΔABC ähnlich.

Beweis. Weil diese 7 Dreiecke dem umschriebenen Dreiecke ähnlich sind, müssen ihre Höhendreiecke auch ΔABC ähnlich sein.

Zusatz 3. D', D'' und D''' ist der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises der Höhendreiecke von Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Beweis. Weil M', der Höhendurchschnittspunkt des umschriebenen Dreiecks, der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises von ΔABC ist, müssen D', D'', D''', die Höhendurchschnittspunkte in Δ_1, Δ_2, Δ_3, auch die Mittelpunkte ihrer Höhendreiecke sein.

17. Die grösste Seite eines an eine Dreiecksseite gelegten äusseren Berührungsdreiecks (bei a also $\alpha_{1_b}\alpha_{1_c}$) hat die Lage, dass sie in dem an dieselbe Seite aussen angeschriebenen Dreiecke ($\Delta A'BC$) durch die Fusspunkte der beiden Höhen geht, deren Spitzen in den Endpunkten der Seite des Hauptdreiecks liegen (durch B_1 und C_1).

Beweis. (Allg. Fig.) Nach 16 Zusatz 2 ist $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$, folglich $\sphericalangle A_1B_1C_1 = B$, und nach 16 Zusatz 3 also $\sphericalangle D'B_1C_1 = \frac{B}{2}$. Ferner

ist, weil auch $\sphericalangle A_1 B_1 D' = \frac{B}{2}$ und $\sphericalangle D'B'C = 90^\circ$, $\sphericalangle A_1 B_1 C = \frac{A+C}{2}$.
Es ist aber $\Delta B_1 C A_1 \cong B_1 C \alpha_{1_b}$, folglich auch $\sphericalangle C B_1 \alpha_{1_b} = \frac{A+C}{2}$. Demnach ist die Summe der Winkel $\sphericalangle D'B_1 C_1 + \sphericalangle D'B_1 C + \sphericalangle C B_1 \alpha_{1_b} = 180^\circ$, folglich liegen $C_1 B_1$ und α_{1_b} in einer geraden Linie. Ebenso wird bewiesen, dass $\sphericalangle D'C_1 B_1 + \sphericalangle D'C_1 B + \sphericalangle B C_1 \alpha_{1_c} = 180^\circ$, folglich geht $\alpha_{1_b}\alpha_{1_c}$ durch die Punkte B_1 und C_1.

18. In den 8 ähnlichen Nebendreiecken wird jeder Winkel durch die Höhe in die beiden halben Hauptdreieckswinkel getheilt, aus denen man ihn sich zusammengesetzt denken kann: $\frac{A+B}{2}$ in $\frac{A}{2}$ und $\frac{B}{2}$, $\frac{A+C}{2}$ in $\frac{A}{2}$ und $\frac{C}{2}$ und $\frac{B+C}{2}$ in $\frac{B}{2}$ und $\frac{C}{2}$.

Beweis. In Δ_1 ist $\sphericalangle BA'C = \frac{B+C}{2}$. Weil nun $\sphericalangle A'BC$ der halbe Supplementwinkel von B ist, so ist $\sphericalangle A_1 A'B$ das Complement zu diesem halben Supplementwinkel, folglich $\frac{B}{2}$ und ebenso $A_1 A'C = \frac{C}{2}$.

Zusatz 1. Der Winkel, den in einem aussen angeschriebenen Dreiecke die Radiushöhe mit einer angeschriebenen Seite bildet, ist gleich dem Winkel, den die andere angeschriebene Seite mit der Höhe des umschriebenen Dreiecks bildet, deren Spitze in dem Scheitel des gemeinschaftlichen Winkels beider Dreiecke liegt. ($\sphericalangle A_1 A'B = \sphericalangle AA'C$ und $\sphericalangle A_1 A'C = \sphericalangle AA'B$.)

Beweis. Beide Dreiecke sind ähnlich, ihre Grundlinien aber antiparallel.

Zusatz 2. Der Winkel, der zwischen diesen beiden Höhen liegt, ist gleich der Differenz der beiden Winkel, in welche der Dreieckswinkel durch eine Höhe getheilt wird: in Δ_1 die halbe Differenz von B und C, in Δ_2 die halbe Differenz von A und C und in Δ_3 die halbe Differenz von A und B.

Zusatz 3. Die Höhe des umschriebenen Dreiecks aus A', B'' oder C''' geht durch den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises von Δ_1, Δ_2 oder Δ_3, und die Radiushöhe jedes aussen angeschriebenen Dreiecks oder deren Verlängerung geht durch den Mittelpunkt des das umschriebene Dreieck umschriebenen Kreises.

Beweis. Dieser Satz wurde durch die Anwendung von 7 formulirt.

Zusatz 4. Die Radiushöhen der aussen angeschriebenen Dreiecke, wo es nothwendig wird, hinreichend verlängert, durchschneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte des das umschriebene Dreieck umschriebenen Kreises.

19. In dem Halbirungspunkte der oberen Höhenabschnitte des umschriebenen Dreiecks liegt der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises zweier angeschriebenen Dreiecke (in $M'A'$ für Δ_1 und Δ_a, in $M'B''$ für Δ_2 und Δ_b und in $M'C'''$ für Δ_3 und Δ_c).

Beweis. Weil nach 16 $M'B \perp BA'$ und $M'C \perp CA'$, so lässt sich um Viereck $M'BA'C$ ein Kreis beschreiben, in welchem $M'A'$ ein Durchmesser ist.

Zusatz 1. Der durch a abgeschnittene kleinere Bogen von Kreis O' ist der geometrische Ort für den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises des Hauptdreiecks.

Zusatz 2. Der geometrische Ort für A' liegt in dem vom Kreise O' durch a abgeschnittenen grösseren Bogen, und zwar zwischen den beiden in den Endpunkten von a errichteten Perpendikeln.

Beweis. Legte man A' in den Bogen der Peripherie dieses Kreises, der nicht zwischen den beiden Perpendikeln liegt, sondern von dem einen oder dem andern abgeschnitten wird, so wäre $\Delta A'BC$ nicht mehr spitzwinklich, wie es jedes aussen angeschriebene Dreieck sein muss.

Zusatz 3. Die umschriebenen Kreise der beiden an dieselbe Seite aussen und innen angeschriebenen Dreiecke decken sich, wenn der umschriebene Kreis des Hauptdreiecks gegeben ist.

20. In der Peripherie des umschriebenen Kreises des Hauptdreiecks liegt der Mittelpunkt jedes um ein angeschriebenes Dreieck umschriebenen Kreises (O', O'', O''').

Beweis. (Allg. Fig.) Da Bogen $BAC = 2B + 2C$ ist, so ist der jenseits BC liegende Peripheriewinkel in dem das ΔABC umschriebenen Kreise $B + C$; in dem das Δ_1 umschriebenen Kreise aber ist der auf der Sehne BC stehende Peripheriewinkel $\frac{B+C}{2}$, folglich liegt O' in dem dem Δ_1 zugewendeten Bogen BC des das ΔABC umschriebenen Kreises.

Zusatz zu 19 und 20. O' liegt im Durchschnittspunkte von $M'A'$, O'' in dem von $M'B''$ und O''' in dem von $M'C'''$ und der Peripherie des umschriebenen Kreises von ΔABC.

21. Der Höhendurchschnittspunkt des umschriebenen Dreiecks ist der Mittelpunkt des das innere Berührungsdreieck umschriebenen Kreises.

Beweis durch die Construction der allgemeinen Figur, durch 16 und 16 Zusatz 1.

22. Der Höhendurchschnittspunkt von $\Delta D'BC$ ist der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises um das äussere Berührungsdreieck an a, der Höhendurchschnittspunkt von $\Delta D''AC$ der Mittelpunkt des Kreises um das äussere Berührungsdreieck an b, und der Höhendurchschnittspunkt von $\Delta D'''AB$ der Mittelpunkt des Kreises um das äussere Berührungsdreieck an c.

Beweis. Diese Höhendurchschnittspunkte sind die Mittelpunkte der angeschriebenen Kreise.

23. Die Mittelpunkte der um die kleinen Nebendreiecke umschriebenen Kreise liegen in den Halbirungspunkten der unteren Höhenabschnitte der Radiushöhen in den aussen angeschriebenen Dreiecken (in $D'A_1$, $D''B_2$ und $D'''C_3$).

Beweis. $A_1B' \perp B'D'$ und $A_1C' \perp C'D'$, folglich kann man um Viereck $A_1B'D'C'$ einen Kreis beschreiben, in welchem A_1D' ein Durchmesser ist.

Dritter Abschnitt.

Gleiche Strecken, deren Lage und daraus entspringende Gesetze.

24. Die gleichen Tangenten sowohl des inneren, wie auch die mit diesen und unter sich gleichen Tangenten der äusseren Berührungskreise liegen in den Schenkeln ein und desselben Dreieckswinkels, und wie die gleichen Tangenten des inneren Kreises von dem Scheitel eines Winkels ausgehen, so gehen die auch mit diesen und unter sich gleichen Tangenten der äusseren Berührungskreise von den Endpunkten derjenigen Dreiecksseite aus, welche diesem Winkel gegenübersteht. (Bei $\sphericalangle A$ die ersten AT'' und AT''', bei den letzten CB_2 und BC_3).

Beweis aus Beweis 1.

Bestimmung. Nicht nur AT'' und AT''', sondern auch CB_2 und BC_3 heissen t'; nicht nur BT' und BT''', sondern auch CA_1 und AC_3 heissen t''; nicht nur CT' und CT'', sondern auch BA_1 und AB_2 heissen t'''.

Zusatz. Die Summe der beiden Tangenten zweier angeschriebenen Kreise, die einen Dreieckswinkel bilden, ist gleich der diesem Winkel gegenüberliegenden Dreiecksseite.

Beweis. $AB_2 = BA_1$ und $AC_3 = CA_1$, folglich $BC = AB_2 + AC_3$.

25. Die Differenz der ungleichen Tangenten in einer Dreiecksseite ist gleich der Differenz der beiden andern Seiten.

Beweis. $BA_1 - BT' = T'A_1 = b - c$.

26. Die Differenz der Verlängerungen einer Dreiecksseite über ihre Endpunkte hinaus bis an die Peripherie des umschriebenen Kreises des umschriebenen Dreiecks ($C\omega - B o$ bei a) ist gleich der Differenz der beiden andern Dreiecksseiten.

Beweis. $o\omega$ ist eine Sehne dieses Kreises, deren Halbirungspunkt A_1 ist, weil $A'A_1 \perp o\omega$ und in $A'A_1$ oder deren Verlängerung der Mittelpunkt des Kreises liegt, folglich, weil $BT' = CA_1$, ist $C\omega = Bo + T'A_1$ und somit $C\omega - Bo = T'A_1 = b - c$ (nach 2).

27. Jede Dreiecksseite, auf beiden Seiten bis an die Berührungspunkte der beiden andern angeschriebenen Kreise verlängert ($\beta_{2_a}\gamma_{3_a}$ bei a) ist gleich der Summe der beiden andern Dreiecksseiten.

Beweis. Nach 24 Zusatz ist $A_1B = AB_2$ und $A_1C = AC_3$; es ist aber auch $B\gamma_{3_a} = BC_3$ und $C\beta_{2_a} = CB_2$, folglich $\beta_{2_a}\gamma_{3_a} = AB + AC$.

28. Der untere Höhenabschnitt der Radiushöhen in Δ_1, Δ_2, Δ_3 ist gleich r.

Beweis. $\Delta M'BC \cong \Delta D'CB$, folglich sind als correspondirende Höhen $M'T' = D'A_1$. $M'T$ ist aber r.

Zusatz. Die Seiten des inneren Berührungsdreiecks sind doppelt so gross, wie die Seiten der kleinen Nebendreiecke.

Beweis. Der Radius des umschriebenen Kreises von $\Delta T'T''T'''$ ist so gross, wie der Durchmesser der umschriebenen Kreise von den kleinen Nebendreiecken.

29. Der untere Höhenabschnitt der Radiushöhen in Δ_a, Δ_b, Δ_c ist r' bei Δ_a, r'' bei Δ_b und r''' bei Δ_c.

Beweis. Nennen wir bei Δ_a den Höhendurchschnittspunkt δ', so sind, weil $\Delta M'BC \cong \Delta D'CB$, die unteren Höhenabschnitte der correspondirenden Höhen $\delta'T' = A'A_1 = r_1$.

30. Die Gerade, welche den Mittelpunkt des inneren Berührungskreises mit dem Höhendurchschnittspunkte irgend eines aussen angeschriebenen Dreiecks verbindet, halbirt die Hauptdreiecksseite, welche sie durchschneidet, und wird von dieser halbirt.

Beweis. Man nenne ξ diesen Durchschnittspunkt in a, so ist $\Delta M'T'\xi \cong D'A_1\xi$ (eine Seite und zwei Winkel gleich), folglich $M'\xi = D'\xi$ und weil auch $T'\xi = A_1\xi$, so fällt ξ in H'.

31. Die oberen Höhenabschnitte der beiden Höhen zweier aussen angeschriebenen Dreiecke, welche senkrecht auf einer Seite des umschriebenen Dreiecks (etwa $A'B''$) stehen (also BD' und AD''), sind einander und gleich dem unteren Höhenabschnitte derjenigen Höhe des umschriebenen Dreiecks, welche auf derselben Seite des umschriebenen Dreiecks steht (also $BD' = AD'' = M'C$).

Beweis. Als t''' ist $AB_2 = BA_1 = CT'$, folglich $\Delta D'A_1B \cong \Delta M'T'C \cong D''B_2A$ und deshalb $BD' = M'C = AD''$.

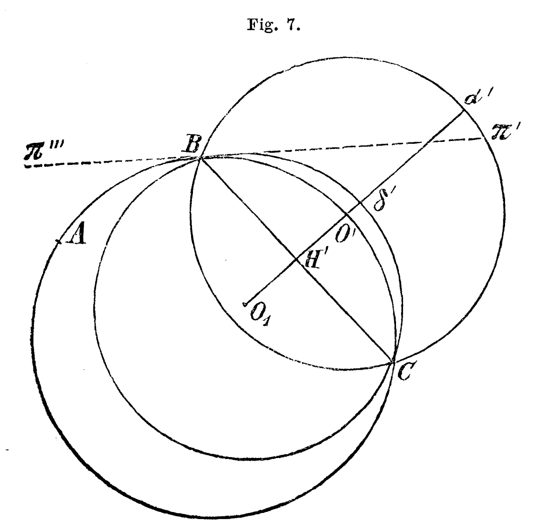
32. In jedem aussen angeschriebenen Dreiecke ist der obere Höhenabschnitt der Radiushöhe ($A'D'$ in Δ_1) doppelt so gross, wie die Länge des Perpendikels auf seiner Hauptdreiecksseite in ihrem H (H') bis zu seinem O (O'). (Also $A'D' = 2H'O'$ in Δ_1.)

Beweis. Nach 30 geht $M'D'$ durch H' und nach 7 Zusatz 4 $M'A'$ durch O', folglich $M'H' : M'D' = H'O' : D'A'$. Da aber nach 30 $M'D' = 2M'H'$, so ist auch $D'A' = 2H'O'$.

Zusatz 1. Die oberen Höhenabschnitte des umschriebenen Dreiecks werden durch die Peripherie des umschriebenen Kreises von ΔABC halbirt.

Beweis. $M'O' : M'A' = M'H' : M'D'$.

Fig. 7.



Zusatz 2. Der geometrische Ort des Höhendurchschnittspunktes eines aussen angeschriebenen Dreiecks liegt in dem diesem Dreiecke (hier Δ_1) zugewendeten Bogen ($B\delta'C$) des dem umschriebenen Kreise dieses Dreiecks congruenten Kreise, welch beide Kreise mit dem umschriebenen Kreise des Hauptdreiecks eine gemeinschaftliche Sehne (BC) haben, welche diejenige Seite von ΔABC ist, an welche das Dreieck angeschrieben.

Beweis. (Fig. 7.) $BO'C$ ist der dem ΔABC umschriebene Kreis. Verlängert man $O'H'$ über H' und macht $H'O_1 = H'O'$, so sind O' und O_1 die Mittelpunkte der congruenten Kreise, und $O'O_1$ gleich der Länge des oberen Höhenabschnitts der Radiushöhe in Δ_1. Es sind aber als Radien congruenter Kreise $O'\alpha' = O_1\delta'$, folglich $O_1O' = \delta'\alpha'$. Da aber alle zwischen den Bogen $B\alpha'C$ und $B\delta'C$ parallel zu $\delta'\alpha'$ laufenden Geraden gleich sind, so ist Bogen $B\delta'C$ der geometrische Ort des Höhendurchschnittspunktes von Δ_1.

33. Die Gerade, welche die Höhendurchschnittspunkte zweier aussen angeschriebener Dreiecke verbindet, ist gleich derjenigen Hauptdreiecksseite, welche von dieser Geraden nicht durchschnitten wird.

Beweis. Nach 31 ist $BD''' = CD''$ und $AD''' = CD'$, es ist aber auch $\sphericalangle AD'''B = \sphericalangle D'CD'' = C + \frac{A+B}{2}$, folglich $\Delta AD'''B \cong \Delta D'CD''$ und deshalb $AB = D'D''$. Ebenso $BC = D''D'''$ und $CA = D'''D'$.

Zusatz 1. $\Delta ABC \cong \Delta D'D''D'''$.

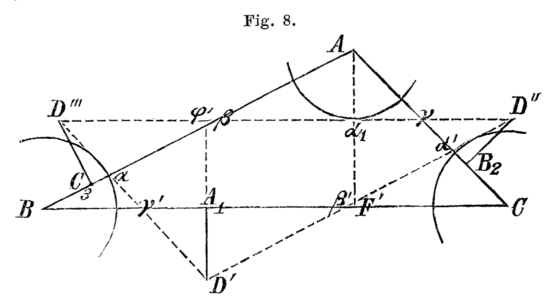
Zusatz 2. In diesen beiden Dreiecken laufen die gleichen Seiten mit einander parallel.

Beweis. Weil in den Vierecken $ABD'D''$, $BCD''D'''$ und $CAD'''D'$ die gegenüberliegenden Seiten gleich sind, so sind dieselben Parallelogramme, also $AB \parallel D'D''$ etc.

Zusatz 3. Wie der Höhendurchschnittspunkt von $\Delta D'D''D'''$, nämlich M''', der Mittelpunkt des dem umschriebenen Dreiecke zu ΔABC umschriebenen Kreises ist, so ist D, der Höhendurchschnittspunkt von ΔABC, der Mittelpunkt des dem umschriebenen Dreiecke zu $\Delta D'D''D'''$ umschriebenen Kreises.

34. Die durch den gemeinschaftlichen Flächeninhalt der $\Delta\Delta\ ABC$ und $D'D''D'''$ abgeschnittenen 6 Dreiecke haben mit ihrer Spitze in A, B, C, D', D'', D''' eine gleich grosse Höhe, nämlich r.

Fig. 8.



Andere Fassung. An den Kreisen mit dem Mittelpunkte A, B und C und dem Radius r werden in derselben Reihenfolge die geraden Verbindungen von D'' und D''', von D''' und D' und von D' und D'' zu Tangenten.

Beweis. (Fig. 8.) Weil $\Delta ABC \cong \Delta D'D''D'''$, so ist auch $AF' = D'\varphi'$. Weil $BC \parallel D''D'''$, so ist auch $\alpha_1 F' = A_1 \varphi'$, folglich $A\alpha_1 = D'A_1 = r$.

Zusatz. Von diesen 6 Dreiecken sind je die zwei sich gegenüberliegenden Dreiecke congruent.

Beweis. Weil die drei Seiten der $\Delta\Delta\ A\beta\gamma$ und $D'\beta'\gamma'$ parallel laufen, so sind es ähnliche Dreiecke, und weil sie aus der homologen Ecke A und D' die gleiche Höhe haben, so ist $\Delta A\beta\gamma \cong \Delta D'\beta'\gamma'$.

Buchstabengebung δ' ist der Höhendurchschnittspunkt von Δ_a, δ'' der von Δ_b und δ''' der von Δ_c.

35. In Δ_1 und Δ_a ist $A'C = B\delta'$ und $A'B = C\delta'$, in Δ_2 und Δ_b $B''C = A\delta''$ und $B''A = C\delta''$, in Δ_3 und Δ_c ist $C'''A = B\delta'''$ und $C'''B = A\delta'''$ und die gleichen Linien sind parallel.

Beweis. In Δ_1 und Δ_a ist $A'A_1 = \delta'T'$ und $A_1C = T'B$, folglich in den rechtwinklichen $\Delta\Delta\ A'A_1C$ und $\delta'T'B$ auch $A'C = \delta'B$ und $\sphericalangle A'CA_1 = \sphericalangle \delta'BT'$, folglich $A'C \parallel \delta'B$.

Zusatz 1. Verbindet man δ' und δ'' durch eine Gerade, so geht diese durch T''', ebenso $\delta''\delta'''$ durch T' und $\delta'''\delta'$ durch T''.

Beweis. (Fig. 9.) Man bezeichne mit $\mathfrak{x}$ den Durchschnittspunkt von AC und $\delta'\delta'''$.

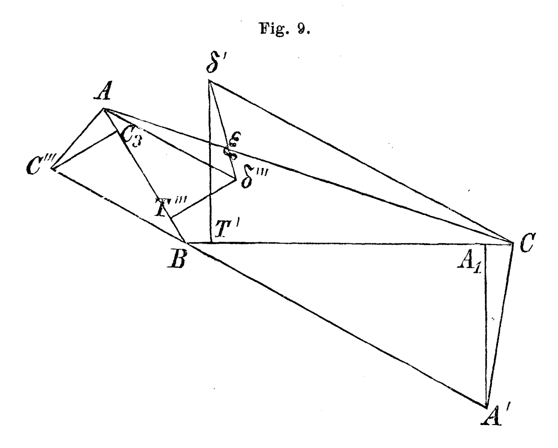


Fig. 9.

Weil $C'''B$ und BA' eine Gerade bilden, und $\delta'''A \parallel C'''B$, und $\delta'C \parallel BA'$, so ist auch $\delta'''A \parallel \delta'C$, folglich $\sphericalangle \delta'''AC = \sphericalangle \delta'CA$ und es verhält sich in den $\Delta\Delta\, \delta'''A\xi$ und $\delta'C\xi$ deshalb $A\xi : C\xi = A\delta''' : C\delta'$. In den ähnlichen $\Delta\Delta\, C'''C_3B$ und $A'A_1B$ verhält sich

$$C'''B : BA' = BC_3 : BA_1$$

und weil $C'''B = A\delta'''$ und $BA' = C\delta'$, so verhält sich $A\delta''' : C\delta' = BC_3 : BA_1$. Durch die erste und letzte Proportion entsteht aber die Proportion $A\xi : C\xi = BC_3 : BA_1 = t' : t'''$, folglich, weil $AC = t' + t'''$, fällt ξ in T''.

Zusatz 2. Ist ΔABC gleichseitig, so fällt δ' in A, δ'' in B und δ''' in C. — Ist ΔABC gleichschenklich mit der Grundlinie b, so fällt, wenn $B > 60^\circ$, $\delta'\delta'''$ in die Mitte von AC und es ist $A\delta' < A\delta'''$; ist jedoch $B < 60^\circ$, so fällt AC in die Mitte von $\delta'\delta'''$ und es ist $\delta'A < \delta'C$.

36. Jede Gerade, welche die Fusspunkte der Höhen zweier aussen angeschriebenen Dreiecke, deren Spitzen in ein und derselben Dreiecksspitze des Hauptdreiecks liegen, verbindet, ist gleich t ($A_2A_3 = B_1B_3 = C_1C_2 = t$).

Beweis. (Allg. Fig.) Wenn man an einem spitzwinklichen Dreiecke die Fusspunkte zweier Höhen durch eine Gerade verbindet, so wird von demselben ein ähnliches spitzwinkliches Dreieck abgeschnitten, folglich ΔAB_3C_3 ähnlich den 8 ähnlichen Nebendreiecken. Aus Beweis 17 geht aber hervor, dass auch $\Delta \alpha_{1_b}B_1C$ (wie auch $\Delta \alpha_{1_c}BC_1$) diesen 8 Nebendreiecken ähnlich ist, folglich $\Delta AB_3C_3 \backsim \Delta \alpha_{1_b}B_1C$ und weil als t'' auch $AC_3 = \alpha_{1_b}C$, so ist auch $AB_3 = \alpha_{1_b}B_1$. Ferner ist $\alpha_{1_b}\alpha_{1_c} \parallel B''C'''$ (weil beide antiparallel zu BC), folglich ist Viereck $A\alpha_{1_b}B_1B_3$ ein Parallelogramm und $B_1B_3 = A\alpha_{1_b} = t$.

Zusatz 1. Jede dieser Geraden halbirt die zwei Seiten des Hauptdreiecks, welche sie durchschneidet.

Beweis. Da $\sphericalangle AC_2C = 90^\circ$, ist $H''C = H''C_2$, folglich im $\Delta H''CC_2$ $\sphericalangle CH''C_2 = B + C$; $\sphericalangle CH''H'$ ist aber $= A$, folglich bilden C_2H'' und $H''H'$ eine Gerade. Ebenso wird bewiesen, dass C_1H' und $H'H''$ eine Gerade bilden. — Dieser Beweis ist ein zweiter Beweis für den Hauptsatz, denn da $C_2H'' = \frac{b}{2}$ und $H''H' = \frac{c}{2}$ und $H'C_1 = \frac{a}{2}$, so ist $C_2C_1 = t$.

Zusatz 2. Die Strecke in jeder Seite des umschriebenen Dreiecks, die zwischen den Fusspunkten der Höhen zweier aussen angeschriebenen Dreiecke liegt, ist gleich der Summe der beiden ausserhalb des dritten aussen angeschriebenen Dreiecks liegenden Segmenten der grössten Seite des hier liegenden äusseren Berührungsdreiecks (z. B. $C_2 B_3 = B_1 \alpha_{1_b} + C_1 \alpha_{1_c}$).

Beweis. Nach dem Beweis des Hauptsatzes ist $AB_3 = \alpha_{1_b} B_1$. Ebenso ist $AC_2 = \alpha_{1_c} C_1$, folglich $C_2 B_3 = \alpha_{1_b} B_1 + \alpha_{1_c} C_1$.

37. Die Tangente in A, B oder C an den umschriebenen Kreis gelegt und bis an die Peripherie eines einem angeschriebenen Dreiecke umschriebenen Kreises verlängert, ist gleich der Seite des Hauptdreiecks, an welches das Dreieck angeschrieben. (Fig. 7 $B\pi' = BC$.)

Beweis. Als Berührungswinkel ist $\sphericalangle CB\pi' = A$; es ist aber $\sphericalangle CBO' = \frac{A}{2}$, folglich Sehne BC und $B\pi'$ gleich weit von O' entfernt, und somit gleich. Ebenso ist, wo man auch im Bogen BC, jenseits O', A annimmt, $BA = B\pi'''$ (π''' in der Peripherie des umschriebenen Kreises des an BA angeschriebenen Dreiecks) folglich:

Zusatz. Die Tangente, in A, B oder C an den umschriebenen Kreis gelegt und nach beiden Seiten bis an die Peripherie beider den beiden angeschriebenen Dreiecken umschriebenen Kreise verlängert, ist gleich der Summe der beiden Seiten des Hauptdreiecks, die von A, B oder C ausgehen ($\pi'\pi''' = BC + BA$).

38. Die Seiten des inneren und der 3 äusseren Berührungsdreiecke werden durch die Geraden von A, B und C, beim inneren nach dem Mittelpunkte des inneren, bei den äusseren nach dem Mittelpunkte des jedem zugehörigen äusseren Berührungskreises halbirt.

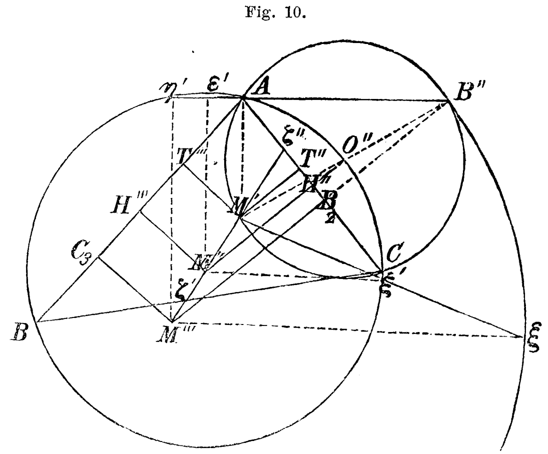
Beweis. Die $\Delta\Delta AT''T'''$, $BT'T'''$, $CT'T''$, $A\alpha_{1_b}\alpha_{1_c}$, $BA_1\alpha_{1_c}$, $CA_1\alpha_{1_b}$ etc. sind gleichschenklich, deren Winkel an ihrer Spitze durch eine der in Rede stehenden Geraden halbirt wird, weshalb ihre Grundlinien durch dieselbe Gerade halbirt werden muss.

39. In der Geraden $M'M'''$ liegt in ihrem Halbirungspunkte M''.

Beweis. (Fig. 10.) Weil $M'T'' \parallel M''H''$ und $T''H'' = H''B_2$, so muss eine Parallele zu $M''H''$ von B_2 aus die verlängerte $M'M''$ in einem Punkte treffen, der von M'' so weit entfernt ist, wie M'' von M'. Ebenso muss eine Parallele zu $M''H'''$ von C_3 in denselben Punkt fallen, der somit nach 18 Zusatz 4 M''' ist.

Zusatz. Die gemeinschaftliche Centrale dieser drei Kreise (Mittelpunkt M', M'' und M''') geht verlängert durch die grösste und kleinste Dreiecksseite.

Fig. 10.



Beweis. (Fig. 10.) Man nenne den Durchschnittspunkt der Centrale in a, b und c oder deren Verlängerungen ζ', ζ'' und ζ'''. (ζ''' ist in der Figur nicht bezeichnet.) Weil hier AB metrisch die mittlere Dreiecksseite ist, ist nach 2 Zusatz auch $T'''C_3 > T''B_2$, folglich $\zeta'''T''' > \zeta''T''$, somit liegt, weil $AT''' = AT''$, ζ'' in AT'' und ζ''' in der Verlängerung von AB über A und es liegt deshalb auch ζ' in BC.

40. Der Durchmesser des umschriebenen Kreises von $\varDelta ABC$ ist gleich dem Radius des dem umschriebenen Dreiecke umschriebenen Kreises.

Beweis. (Fig. 10.) Zieht man die Gerade $M'B''$ und verlängert $M''H''$ über H'', so trifft letztere die erstere in der Peripherie des umschriebenen Kreises in Punkt O'' (Zusatz zu 19 und 20), es verhält sich deshalb $M'M'' : M'M''' = M''O'' : M'''B'' = R : M'''B'' = 1:2$, folglich $2R = M'''B''$.

41. Jede Gerade, von M' nach einem beliebigen Punkte in der Peripherie des Kreises M''' gezogen, wird durch die Peripherie des Kreises M'' halbirt.

Beweis. (Fig. 10.) $M'\xi$ sei eine solche beliebige Gerade. — Man ziehe die Gerade $M'''\xi$, und zu derselben von M'' aus eine Parallele, die $M'\xi$ in ξ' trifft, so verhält sich: $M'M'' : M'M''' = M''\xi' : M'''\xi = 1:2$. Da aber (nach 40) $M'''\xi = 2R$, so fällt ξ'' in die Peripherie des Kreises M''.

Anmerkung. Dieser Satz verallgemeinert 32 Zusatz 1.

42. Der umschriebene Kreis, der in einer Dreiecksspitze die durch dieselbe gehende Seite des umschriebenen Dreieckes durchschneidet, halbirt dieselbe bei seiner zweiten Durchschneidung (allg. Fig. $\eta'B'' = \eta'C'''$).

Beweis. (Fig. 10.) $A\eta'$, die Verbindung beider Durchschnittspunkte, ist eine Sehne im umschriebenen Kreise, und ist ε' ihr Halbirungspunkt, so ist $M''\varepsilon' \perp A\eta'$, und weil auch $M'A \perp A\eta'$, so muss auch $M'''\eta' \perp A\eta'$ sein. Denkt man sich nun den in der Figur nicht bezeichneten Punkt C''', so ist, weil $M'''\eta' \perp B''C'''$, Punkt η' der Halbirungspunkt von $B''C'''$.

Zusatz 1. Der Kreis M'' schneidet von der grösseren zweier angeschriebenen Seiten, welche zusammen eine Seite des umschriebenen Dreieckes bilden, die Hälfte ihrer Differenz ab $\left(A\eta' = \frac{AC''' - AB''}{2}\right)$.

Zusatz 2. Der Bogen von Kreis M'', den eine Seite des umschriebenen Dreiecks von seiner Peripherie abschneidet, ist gleich der Differenz derjenigen Hauptdreieckswinkel, durch deren Scheitel jene Seite nicht geht (allg. Fig. Bogen $A\eta' = B - C$).

Beweis. (Allg. Fig.) AM' über M' verlängert trifft die Peripherie von Kreis M'' in Punkt O', von welchem eine Gerade, nach η' gezogen, durch M'' geht, weil $\sphericalangle O'A\eta = 90^\circ$. Weil $O'\eta'$ aber auch durch H' geht (Bogen $O'B =$ Bogen $O'C$), so ist $\eta'O' \parallel A_1A'$, folglich $\sphericalangle \eta'O'A = \sphericalangle A_1A'A = \frac{B-C}{2}$ und somit Bogen $A\eta' = B - C$.

Zusatz 3. Bei jedem ungleichseitigen Dreieck schneidet die metrisch mittlere Seite des umschriebenen Dreiecks vom Kreise M'' einen Bogen ab, der so gross ist wie die Summe der beiden Bogen, welche die grösste und kleinste Seite dieses Dreiecks von diesem Kreise abschneiden (Bogen $B\eta'' =$ Bogen $A\eta' +$ Bogen $C\eta'''$).

Beweis. Bogen $B\eta'' = A - C$, Bogen $C\eta''' = A - B$ und Bogen $A\eta' = B - C$, folglich Bogen $C\eta''' +$ Bogen $A\eta' = A - C =$ Bogen $B\eta''$.

43. Die Ergänzung zur Sehne von $M'T'$ im Kreise O', von $M'T''$ im Kreise O'' und von $M'T'''$ im Kreise O''' ist in derselben Reihenfolge gleich r', r'' und r'''.

Beweis. (Allg. Fig.) Nennt man $T'T_1$ diese Ergänzung von $M'T'$, so stehen T_1T', $A'A_1$ und $O'H' \perp BC$. Weil aber $H'T' = H'A_1$, so ist $T'T_1 = A_1A' = r'$

Zusatz 1. Die Gerade T_1A' ist gleich der Differenz von b und c.

Beweis. $T_1A' = T'A_1 = b - c$.

Zusatz 2. Der Bogen T_1A' ist gleich der Differenz von B und C.

Beweis. $\sphericalangle A'M'T_1 = \frac{B-C}{2}$, folglich Bogen $T_1A' = B - C$.

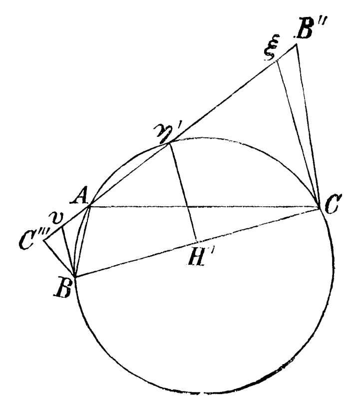
Zusatz 3. Bei jedem aussen angeschriebenen Dreiecke ist in seinem umschriebenen Kreise die Ergänzung der Radiushöhe zur Sehne gleich r.

Anmerkung. Die Beziehungen von 42 und 43 und ihren Zusätzen sind zu einander wechselseitig, und man wird lebhaft davon überzeugt werden, wenn man nach diesen Sätzen $\triangle ABC$ aus den Gaben $b - c$, $B - C$ und $M'A$ construirt.

44. Die an den Endpunkten einer Dreiecksseite (B und C in Fig. 11) errichteten Perpendikel theilen bei hinreichender Verlängerung die mit dieser Seite parallel oder antiparallel laufende Seite des umschriebenen Dreiecks in drei Theile, von denen die äusseren sich gleich sind ($B''\xi = C'''v$).

Beweis. Der Perpendikel auf BC in H' trifft $B''C'''$ in η', dem Halbirungspunkte von $B''C'''$. Weil $C\xi \parallel H'\eta' \parallel Bv$, so ist $\eta'\xi = \eta'v$, folglich $B''\xi = C'''v$.

Fig. 11.



45. Im rechtwinklichen Dreiecke mit dem rechten Winkel A ist $t' = r$, $t'' = r'''$, $t''' = r''$ und $t = r'$.

Beweis. Viereck $AT''M'T'''$ ist ein Quadrat, folglich $t' = r$. Ferner sind die ähnlichen $\Delta\Delta\, B''B_2A$ und $C'''C_3A$, weil ihr Winkel bei A als halber Supplementwinkel von 90°, 45° ist, gleichschenklich, folglich $B''B_2 = B_2A = CT'' = t'''$ und ebenso $C'''C_3 = C_3A = BT''' = t''$. Schliesslich ist $A'A_1 = A'D' + D'A_1$. Es ist aber (32) $A'D' = 2H'O' = 2R = BC = t'' + t'''$ und (28) $D'A_1 = r = t'$, folglich $A'A_1 = t' + t'' + t''' = t$.

Zweiter Beweis für $A'A_1 = t$. In den ähnlichen $\Delta\Delta\, A'A_1C$ und $B''B_2C$ verhält sich $A'A_1 : A_1C = B''B_2 : B_2C$ oder $A'A_1 : c - r = b - r : r$, deshalb $A'A_1 = \frac{cb}{r} - c - b + r$. Es ist aber $cb = 2\Delta ABC$, folglich $\frac{cb}{r} = a + b + c$ und somit $A'A_1 = a + r = t$, weil im rechtwinklichen Dreiecke $a + r$ gleich dem halben Umfange ist.

Zusatz. Die Monde des Hippokrates haben die Eigenschaft, dass in jedem derselben die Gerade, welche die Mitte beider Bogen verbindet, gleich ist $\frac{b + c - a}{2} = t' = r$.

Beweis. Nennt man $\xi\zeta$ diese Gerade über b, ζ näher an b, so ist $\xi\zeta = \frac{b}{2} - \zeta H''$ und $\zeta H'' = \frac{a}{2} - \frac{c}{2}$, folglich $\xi\zeta = \frac{b + c - a}{2}$. — Der Beweis für diese Gerade über c ist derselbe.

Buchstabengebung. (Allg. Fig.) Die Durchschnittspunkte der über ihre Fusspunkte verlängerten Höhen des umschriebenen Dreiecks und des dieses Dreieck umschriebenen Kreises sind μ' bei $A'A$, μ'' bei $B''B$ und μ''' bei $C'''C$.

46. $A'M' = A'\mu'' = A'\mu'''$; $B''M' = B''\mu' = B''\mu'''$ und $C'''M' = C'''\mu' = C'''\mu''$.

Beweis. $M'B = B\mu''$ (41) und $A'B \perp M'\mu''$ (16), folglich $\Delta A'BM' \cong \Delta A'B\mu''$, somit $A'M' = A'\mu''$. Ebenso $\Delta A'CM' \cong \Delta A'C\mu'''$ etc.

47. $\Delta \mu'\mu''\mu''' \sim \Delta ABC$ und die Seiten von $\Delta \mu'\mu''\mu'''$ doppelt so gross wie die mit ihnen correspondirenden Seiten von ΔABC.

Beweis. Weil $M'B = B\mu''$ und $M'C = C\mu'''$, so verhält sich $M'B : M'\mu'' = BC : \mu''\mu''' = 1 : 2$.

48. Beschreibt man mit dem Radius einer Höhe des umschriebenen Dreiecks (etwa $A'A$) aus dem Mittelpunkt ihrer Spitze (A') einen Kreisbogen bis dieser die verlängerte Dreiecksseite (BC) durchschneidet, durch welche diese Höhe ($A'A$) geht, so ist die durch diesen Kreisbogen abgeschnittene Verlängerung auf der einen, wie auf der anderen Seite (etwa $C\alpha$) gleich der Dreiecksseite (CA), welche die erste Seite (BC) von ihrer Verlängerung ($C\alpha$) abschneidet ($C\alpha = CA$).

Beweis. (Allg. Fig.) Weil in den $\Delta\Delta\ A'CA$ und $A'C\alpha$ $\sphericalangle A'CA = \sphericalangle A'C\alpha$, $A'A = A'\alpha$ und $A'C$ gemeinschaftlich, so ist auch $C\alpha = CA$. — Ebenso ist, schlägt man aus B'' mit Radius $B''B$ einen Kreisbogen bis die verlängerte AC in β getroffen wird, $C\beta = CB$.

Zusatz 1. $\Delta\ \alpha\beta C \cong \Delta\ ABC \cong$ den beiden anderen Dreiecken, welche analog an A und B gebildet werden, wie $\Delta\ \alpha\beta C$ an C.

Zusatz 2. Zu diesen 3 Dreiecken ist μ', μ'' oder μ''' der Mittelpunkt des inneren Berührungskreises.

Beweis. (Allg. Fig.) Weil nach Beweis 46 $\Delta\ A'CM' \cong \Delta\ A'C\mu'''$, so ist auch $\sphericalangle CA'M' = \sphericalangle CA'\mu'''$ und weil nach Beweis 48 $\Delta\ A'CA \cong \Delta A'C\alpha$, so ist auch $\sphericalangle CA'A = \sphericalangle CA'\alpha$; folglich fällt μ''' in $A'\alpha$ und ebenso in $B''\beta$. Weil aber nach 48 Zusatz 1 $\sphericalangle C\alpha\beta = A$ und $\sphericalangle A'\alpha C = \sphericalangle A'AC = \frac{A}{2}$, so wird $\sphericalangle C\alpha\beta$ durch $\mu'''\alpha$ halbirt. $\mu'''C$ halbirt aber auch $\sphericalangle \alpha C\beta$, folglich ist μ''' der Mittelpunkt des innern Berührungskreises von $\Delta\ \alpha\beta C$.

Zusatz 3. Zu $\Delta\alpha\beta C$ sind die $\Delta\Delta A'\beta C$ und $B''C\alpha$ aussen angeschriebene Dreiecke, $A'B''$ eine Seite, und $A'\alpha$ und $B''\beta$ zwei Höhen seines umschriebenen Dreiecks, dessen umschriebener Kreis durch A', B'' und M' geht. Die Verlängerung von AA_2 geht in den Punkt α, die Verlängerung von BB_1 in den Punkt β, und α_{1_b} und β_{2_a} sind die Berührungspunkte zweier an $\Delta\ \alpha\beta C$ angeschriebenen Kreise.

49. Von den beiden Perpendikeln aus A', B'' oder C''' auf die Verlängerungen zweier Seiten von $\Delta\ ABC$ (allg. Fig.: $A'\alpha_{1_b}$ und $A'\alpha_{1_c}$ aus A') ist die Strecke von ihren Fusspunkten bis an die Peripherie des Kreises O', O'' oder O''' ($\alpha_{1_b}\delta_{1_C}$ und $\alpha_{1_c}\delta_{1_B}$ [sprich $\alpha_{1_b}\delta_1$ bei C und $\alpha_{1_c}\delta_1$ bei B]) gleich r.

Zweite Fassung. Bei den beiden symmetrisch an Δ_1, Δ_2 oder Δ_3 liegenden Dreiecken liegt der Höhendurchschnittspunkt in der Peripherie des um Δ_1, Δ_2 oder Δ_3 umschriebenen Kreises.

Beweis. (Allg. Fig.) $\sphericalangle CA'D' = \sphericalangle CA'\delta_{1_C} = \frac{C}{2}$, folglich Bogen $C\delta_{1_C} = C$. Es ist aber auch $\sphericalangle CBB_1 = \frac{C}{2}$, deshalb muss die verlängerte BB_1, nämlich $B\beta$ durch Punkt δ_{1_C} gehen. δ_{1_C} ist demnach der Höhendurchschnittspunkt von $\Delta\ A'C\beta$ und somit $\delta_{1_C}\alpha_{1_b} = r$. Ebenso $\delta_{1_B}\alpha_{1_c} = r$.

Vierter Abschnitt.

Proportionen und Flächeninhalte.

50. Die Radien je zweier angeschriebenen Kreise stehen im gleichen Verhältnisse zu ihren Tangenten, die einen Hauptdreieckswinkel bilden, wie auch zu den angeschriebenen Seiten, welche von dem Scheitel desselben Winkels ausgehen, also $r' : r'' = t'' : t' = CA' : CB''$, und $r'' : r''' = t''' : t'' = AB'' : AC'''$, und $r''' : r' = t' : t''' = BC''' : BA'$.

Beweis. (Allg. Fig.) $\varDelta A'A_1C \backsim \varDelta B''B_2C$; $\varDelta B''B_2A \backsim \varDelta C'''C_3A$; und $\varDelta C'''C_3B \backsim \varDelta A'A_1B$.

51. Die Tangenten in einer Dreiecksseite stehen, betrachtet man sie als die Tangenten des angeschriebenen Kreises, über's Kreuz im gleichen Verhältnisse zu den beiden angeschriebenen Seiten, welche diejenige Seite des umschriebenen Dreiecks ausmachen, welche der Hauptdreiecksseite, in welcher sich die Tangenten befinden, gegenüberliegt. (Allg. Fig. Bei a also $t'' : t''' = AC''' : AB''$.)

Beweis. In den ähnlichen $\varDelta\varDelta A'B''C'''$ und $A'BC$ mit den antiparallelen Seiten $B''C'''$ und BC fusst in ihnen die Höhe aus A' in A und A_1. Es verhält sich deshalb $AC''' : AB'' = A_1C : A_1B = t'' : t'''$.

52. In einem dem $\varDelta ABC$ ähnlichen $\varDelta \alpha\beta\gamma$ von der Grösse, dass $\beta\gamma = r'' + r'''$ ist, in welchem deshalb (nennt man seine Tangenten τ', τ'' und τ''') $\tau'' = r'''$ und $\tau''' = r''$ ist, ist $\tau' = \frac{r''r'''}{r'}$.

Beweis. Nennt man die Radien der an $\varDelta \alpha\beta\gamma$ angeschriebenen Kreise ϱ', ϱ'' und ϱ''', so verhält sich $\varrho' : \varrho'' = \tau'' : \tau' = r''' : \tau'$. Es verhält sich aber auch $\varrho' : \varrho'' = r' : r''$, folglich $r' : r'' = r''' : \tau'$ und somit ist $\tau' = \frac{r''r'''}{r'}$.

Dieser Satz gibt das Mittel, durch die Radien der angeschriebenen Kreise und durch Vermittlung des $\varDelta \alpha\beta\gamma$ das $\varDelta ABC$ zu construiren oder dessen Seiten zu berechnen, denn da $\beta\gamma = r'' + r'''$, so ist $\alpha\beta = r'' + \frac{r''r'''}{r'}$ und $\alpha\gamma = r''' + \frac{r''r'''}{r'}$.

53. (Fig. 8.) Jede Seite eines der beiden congruenten $\varDelta\varDelta ABC$ und $D'D''D'''$ wird durch zwei Seiten des anderen Dreiecks in drei Theile zerlegt, die sich zu einander verhalten, wie $a : b : c$ und

zwar der mittlere Theil zu der Seite, in welcher er liegt, wie die auf beiden Seiten liegenden Theile zu den sie abschneidenden Seiten, also $A\gamma : \gamma\alpha' : \alpha'C = a : b : c$; $C\beta' : \beta'\gamma' : \gamma'B = c : a : b$ und $B\alpha : \alpha\beta : \beta A = b : c : a$.

Beweis. In den ähnlichen $\Delta\Delta\, ABC$ und $A\beta\gamma$ verhält sich (nach 34) $h' : a = r : \beta\gamma$, folglich ist $\beta\gamma = \frac{ar}{h'}$ und somit $A\gamma = \frac{br}{h'}$; und in den ähnlichen $\Delta\Delta\, D''D'''D'$ und $D''\gamma\alpha'$ verhält sich $h'' : b = r : \gamma\alpha'$, folglich ist $\gamma\alpha' = \frac{br}{h''}$. Es verhält sich deshalb $A\gamma : \gamma\alpha' = \frac{br}{h'} : \frac{br}{h''} = h'' : h'$, und weil die Höhen im umgekehrten Verhältnisse zu ihren Grundlinien stehen, so verhält sich $A\gamma : \gamma\alpha' = a : b$. Ebenso wird bewiesen, dass $\gamma\alpha' : \alpha'C = b : c$, folglich verhält sich $A\gamma : \gamma\alpha' : \alpha'C = a : b : c$.

54. Die reciproken Werthe der Radien der vier Berührungskreise werden durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''}.\,^{*)}$$

Beweis. (Allg. Fig.) Weil die aussen angeschriebenen Dreiecke dem umschriebenen ähnlich sind, verhält sich $A'A_1 : D'A_1 = A'A : M'A = \Delta A'B''C''' : \Delta M'B''C'''$, folglich ist $\frac{D'A_1}{A'A_1} = \frac{\Delta M'B''C'''}{\Delta A'B''C'''}$, somit nach 28:

1) $\frac{r}{r'} = \frac{\Delta M'B''C'''}{\Delta A'B''C'''}$. Ebenso wird bewiesen, dass

2) $\frac{r}{r''} = \frac{\Delta M'A'C'''}{\Delta A'B''C'''}$ und

3) $\frac{r}{r'''} = \frac{\Delta M'A'B'}{\Delta A'B''C'''}$. Addirt man diese drei Gleichungen, so ist

$$\frac{r}{r'} + \frac{r}{r''} + \frac{r}{r'''} = \frac{\Delta A'B''C'''}{\Delta A'B''C'''} = 1\text{, folglich } \frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''}.$$

Zusatz. Hiernach ist $r = \frac{r'r''r'''}{r'r'' + r'r''' + r''r'''}$; $r' = \frac{rr''r'''}{r''r''' - r(r'' + r''')}$; $r'' = \frac{rr'r'''}{r'r''' - r(r' + r''')}$ und $r''' = \frac{rr'r''}{r'r'' - r(r' + r'')}$.

55. Das Produkt aus dem Radius des inneren und dem eines äusseren Berührungskreises ist gleich dem Produkte aus den beiden Tangenten derjenigen Dreieckseite, an welche der Kreis mit dem letzteren Radius angeschrieben ist. (Z. B. $rr' = t''t'''$.)

1. Beweis. (Allg. Fig.) $\Delta A'A_1B \backsim \Delta BT'M'$, folglich $r' : t''' = t'' : r$.

2. Beweis. Nach 43 ist r' die Ergänzung zur Sehne von r im Kreise O', folglich $rr' = t''t'''$.

---

*) Diesen Satz beweist E. Adams in seiner Schrift: „Die harmonischen Verhältnisse" durch die Mittel der höhern Geometrie. Der zweite Theil seines Beweises, in welchem es sich nicht mehr um die harmonischen Punkte handelt, wurde hier entlehnt.

56. Das Produkt zweier Dreiecksseiten ist gleich dem Produkte derjenigen beiden aussen angeschriebenen Seiten, welche von dem Scheitel des Winkels ausgehen, den diese Dreiecksseiten bilden. ($AB \,.\, AC = AC''' \,.\, AB''$; $BA \,.\, BC = BC''' \,.\, BA'$; und $CB \,.\, CA = CA' \,.\, CB''$.)

Beweis. $\triangle AB''C \backsim \triangle ABC'''$, folglich $AC : AB'' = AC''' : AB$, also $AB \,.\, AC = AC''' \,.\, AB''$.

Zusatz. $ab + bc + ca = A'C \,.\, CB'' + B''A \,.\, AC''' + C'''B \,.\, BA'$.

57. Das Produkt zweier Dreiecksseiten ist gleich dem Produkte aus derjenigen Höhe des umschriebenen Dreiecks, welche ihren Fusspunkt im Scheitel des Winkels hat, welchen diese beiden Dreiecksseiten bilden und aus ihrem unteren Höhenabschnitte. (Allg. Fig. $AB \,.\, AC = A_1A \,.\, M'A$ etc.)

Beweis. $\triangle A'AB \backsim \triangle CAM'$ (18. Zus. 1), folglich $A'A : AB = AC : AM'$, folglich $AB \,.\, AC = A_1A \,.\, M'A$.

58. Die Summe der Quadrate der beiden Geraden, welche, die Mittelpunkte der vier Berührungskreise in zwei beliebige Paare gebracht, die Punkte jedes Paares verbinden, ist gleich dem Quadrate des Durchmessers des Kreises M'''.

(Z. B. $(B''C''')^2 + (A'M')^2 = 16\,R^2$ [40].)

Beweis. (Allg. Fig.) $A'M' = A'\mu'''$, welches eine Sehne im Kreise M''' ist. Da $\mu'''C'''$ durch O''' geht, so ist $\sphericalangle\, \mu'''C'''A' = \sphericalangle\, AC'''C_3 = \frac{A}{2}$, folglich ist der kleinere Bogen $A'\mu''' = A$. Sodann steht auf der Sehne $B''C'''$ der Peripheriewinkel $B''A'C''' = \frac{B+C}{2}$, folglich ist Bogen $B''\mu'C''' = B + C$. Es ist demnach Bogen $A'\mu'''$ + Bogen $B''\mu'C''' = A + B + C = 180^0$, folglich ist, da $A'\mu''' = A'M'$, das Quadrat des Durchmessers des Kreises M''' gleich $(B''C''')^2 + (A'M')^2 = 16\,R^2$.

59. Das Quadrat einer Seite des umschriebenen Dreiecks ist gleich der Summe der beiden Produkte aus je einer der beiden anderen Seiten und der in ihr liegenden angeschriebenen Seite, welche an die erste stösst.

(Z. B. allg. Fig. $(A'B'')^2 = A'C''' \,.\, A'B + B''C''' \,.\, B''A$.)

Beweis. Weil $\triangle A'B''C''' \backsim \triangle A'BC \backsim AB''C$, so verhält sich $A'B : A'C = A'B'' : A'C'''$, folglich 1) $A'B \,.\, A'C''' = A'C \,.\, A'B''$, und $B''C : B''A = B''C''' : B''A'$, folglich 2) $B''A \,.\, B''C''' = B''C \,.\, B''A'$.

Die Summe der Gleichungen 1 und 2 ergeben

$$A'B \,.\, A'C''' + B''A \,.\, B''C''' = A'C \,.\, A'B'' + B''C \,.\, B''A',$$

oder

$$A'B \,.\, A'C''' + B''A \,.\, B''C''' = A'B''(A'C + B''C).$$

Weil aber $A'C + B''C = A'B''$, so ist:

$$(A'B'')^2 = A'C''' \,.\, A'B + B''C''' \,.\, B''A.$$

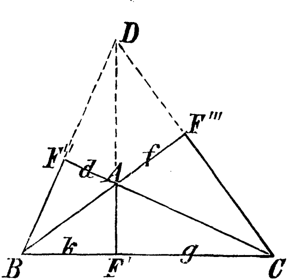
Aus diesem Satze entwickelt sich der allgemein formulirte:

60. Das Quadrat einer Dreiecksseite ist gleich der Summe des Produktes aus der Projection dieser Seite auf die zweite und der zweiten Seite und des Produktes aus der Projection der ersten Seite auf die dritte und der dritten Seite, wobei zu bemerken ist, dass wenn die Projection **ganz** ausserhalb des Dreiecks fällt, dieselbe negativ ist.

Beweis a) für das spitzwinkliche Dreieck. Da jedes spitzwinkliche Dreieck als ein umschriebenes Dreieck betrachtet werden kann, so liegt der Beweis im Beweise 59.

Beweis b) für das rechtwinkliche Dreieck. Da die Projection der Hypotenuse auf eine Kathete die Kathete selbst ist, so ist auch nach diesem Lehrsatze das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der Katheten. Und da die Projection einer Kathete auf die andere 0 ist, so ist auch nach diesem Satze das Quadrat einer Kathete gleich dem Produkte aus ihrer Projection auf die Hypotenuse und der Hypotenuse.

Fig. 12.



Beweis c) für das stumpfwinkliche Dreieck. (Fig. 12.) Man bezeichne AF'' durch d, AF''' durch f, $F'C$ durch g und $F'B$ durch k. Erstens ist $a^2 = b^2 + c^2 + 2bd$ und $a^2 = b^2 + c^2 + 2cf$. Addirt man diese Gleichungen und dividirt durch 2, so ergibt sich $a^2 = b^2 + c^2 + bd + cf$, woraus folgt:

1) $a^2 = b(b + d) + c(c + f)$.

Zweitens, weil $\Delta\, CBF'' \backsim \Delta\, CAF'$, verhält sich $a : b + d = b : g$, folglich $b^2 + bd = ag$ oder $b^2 = ag - bd$. Aus den ähnlichen $\Delta\Delta\, ABF''$ und ACF''' folgt aber, dass $bd = cf$, folglich

2) $b^2 = ag - cf$. Und ebenso wird gezeigt, dass

3) $c^2 = ak - bd$, wodurch für alle Seiten der Beweis hergestellt ist.

61. Die Summe des Quadrats einer Dreiecksseite und des Produktes aus der Projection der zweiten auf die dritte und der dritten Seite ist gleich der Summe des Quadrats der zweiten Seite und des Produktes aus der Projection der ersten auf die dritte und der dritten Seite. (Bei $\Delta\, A'B''C'''$ also z. B. $(A'C''')^2 + B''C \,.\, B''A' = (C'''B'')^2 + A'C \,.\, B''A'$.)

Beweis. Nach 59 ist $(A'C''')^2 = A'C \,.\, A'B'' + C'''A \,.\, C'''B''$. Es ist aber auch $B''C \,.\, B''A' = B''A \,.\, B''C'''$. Addirt man diese Gleichungen, so ist $(A'C''')^2 + B''C \,.\, B''A' = A'C \,.\, A'B'' + C'''A \,.\, C'''B'' + B''A \,.\, B''C''' = A'C \,.\, A'B'' + C'''B''(C'''A + B''A)$, folglich

$$(A'C''')^2 + B''C \,.\, B''A' = (C'''B'')^2 + A'C \,.\, B''A'.$$

Zusatz. Die Summe der Quadrate zweier Dreiecksseiten ist gleich der Summe des Quadrates der dritten Seite und der beiden Produkte, einmal aus der Projection der ersten auf die zweite und der zweiten Seite, und das andere Mal aus der Projection der zweiten auf die erste Seite und der ersten Seite, z. B. $(A'B'')^2+(B''C''')^2=(A'C''')^2+B''A.B''C'''+B''C.B''A')$.

Beweis. $(A'B'')^2 = A'B \,.\, A'C''' + B''A \,.\, B''C'''$ und
$(B''C''')^2 = C'''B \,.\, A'C''' + B''C \,.\, B''A'$. Beides addirt, giebt
$(A'B'')^2 + (B'C''')^2 = (A''C''')^2 + B''A \,.\, B''C''' + B''C \,.\, B''A'$.

62. Das Quadrat einer Seite des $\triangle A'B''C'''$ ist gleich der Summe der beiden Produkte aus je einer der beiden von den Endpunkten dieser Seite ausgehenden Höhe und dem dieser Höhe angehörenden oberen Höhenabschnitte.

(Z. B. $(A'C''')^2 = A'A \,.\, A'M' + C'''C \,.\, C'''M'$.)

Beweis. Denkt man sich den um $\triangle_2$ umschriebenen Kreis O'', so sind für denselben $C'''B''$ und $C'''C$ Secanten, deshalb ist:

$$C'''A \,.\, C'''B'' = C'''M' \,.\, C'''C.$$

Für denselben Kreis sind aber auch $A'B''$ und $A'A$ Secanten, folglich

$$A'C \,.\, A'B'' = A'M' \,.\, A'A.$$

Nach 59 ist aber $(A'C''')^2 = A'C \,.\, A'B'' + C'''A \,.\, C'''B''$, folglich

$$(A'C''')^2 = A'A \,.\, A'M' + C'''C \,.\, C'''M'.$$

Zusatz für 59 und 62. Die Summe der Quadrate der beiden Tangenten von den Mittelpunkten zweier äusseren Berührungskreise (z. B. von A' und B'') an den Kreis O, in dessen Peripherie der Mittelpunkt des dritten äusseren Berührungskreises liegt (Kreis O'''), ist gleich dem Quadrate der Geraden, welche die beiden Mittelpunkte verbindet, von welchen die Tangenten ausgehen.

Beweis wird hergestellt durch den Satz, dass das Quadrat der Tangente gleich ist dem Produkte aus der Secante und ihres ausserhalb des Kreises liegenden Theiles in Verbindung mit 59 oder 62.

Lehrsatz 62 wird verallgemeinert durch

63. Das Quadrat einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der beiden Produkte aus je einer der beiden von den Endpunkten dieser Seite ausgehenden Höhe und ihrem oberen Höhenabschnitte, wobei zu bemerken ist, dass, wenn der obere Höhenabschnitt **ganz** ausserhalb seiner Höhe liegt, derselbe negativ ist.

Beweis. Für das spitzwinkliche Dreieck gilt der Beweis 62. Beim rechtwinklichen Dreieck mit der Hypotenuse a ist nach diesem Satze $a^2 = b^2 + c^2$ und weil bei den Katheten ein Produkt o wird $b^2 = b^2$ und $c^2 = c^2$.

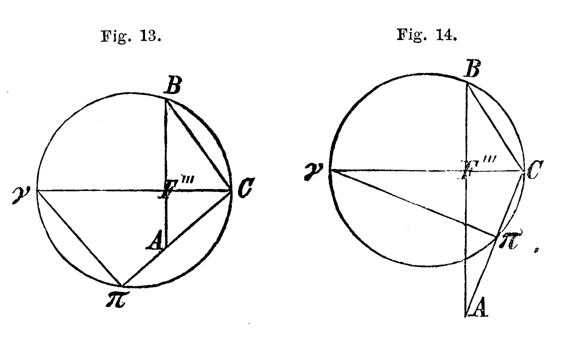
Für das stumpfwinkliche Dreieck verlängere man in Fig. 12 BF'' über F'', CF''' über F''' und AF' über A bis diese Verlängerungen sich in D

schneiden. Dann ist im spitzwinklichen $\varDelta DBC$ nach Lehrsatz 60, was unser Lehrsatz ausspricht 1) $a^2 = BF''.BD + CF'''.CD$.

Ferner ist nach Lehrsatz 60 $b^2 = ag - cf$. Es ist aber $ag = CF'''.CD$ ($\varDelta CBF''' \backsim \varDelta CF'D$), und $cf = AF'.AD$ ($\varDelta ABF' \backsim \varDelta ADF'''$), folglich 2) $b^2 = CF'''.CD - AF'.AD$.

Schliesslich ist nach Lehrsatz 60 $c^2 = ak - bd$. Es ist aber $ak = BF''.BD$ und $bd = cf = AF'.AD$, folglich 3) $c_2 = BF''.BD - AF'.AD$, wodurch alles bewiesen ist.

64. (Fig. 13 und 14.) Das Quadrat einer Dreiecksseite (a) ist gleich dem Produkte aus einer zweiten Seite (b), und der Sehne, welche, wenn sie nicht gleich b, ein Theil von b oder b ein Theil dieser Sehne in **dem** Kreise ist, dessen Mittelpunkt in h''' oder deren Verlängerung liegt und in welchem a eine Sehne ist ($a^2 = b.C\pi$).



Beweis. Weil $C\gamma$ ein Durchmesser dieses Kreises ist, so ist $a^2 = CF'''.C\gamma$. Es ist aber in beiden Figuren $\varDelta C\gamma\pi \backsim \varDelta ACF'''$, folglich $b : CF''' = C\gamma : C\pi$, also auch $b.C\pi = CF'''.C\gamma$, und somit $a^2 = b.C\pi$.

Fällt A und π zusammen, so ist $\varDelta ABC$ gleichschenklich, folglich auch $a^2 = b^2$.

65. Zwei gleichschenkliche Dreiecke mit gleichen Schenkeln, in welchen die Winkel an ihren Spitzen sich supplementiren, oder, was das Gleiche ist, die Winkel an ihren Grundlinien sich complementiren, haben gleichen Flächeninhalt.

Beweis. Durch Aneinanderlegen solcher Dreiecke lässt sich ein rechtwinkliches Dreieck bilden, in welchem aus dem Scheitel des rechten Winkels nach der Mitte der Hypotenuse eine Gerade gezogen ist, welche das rechtwinkliche Dreieck halbirt und dessen Hälften jene Dreiecke sind.

Schlussbemerkung.

Es befindet sich unter den genannten Nebendreiecken nur ein inneres Berührungsdreieck, nämlich das des inneren Berührungskreises, $\Delta\, T'T''T'''$; es gibt aber noch ein zweites inneres Berührungsdreieck, nämlich das der äusseren Berührungskreise, $\Delta\, A_1 B_2 C_3$. Die Gesetze dieses Dreiecks aber, z. B. die Bestimmung seiner Winkel, welche sich durch a, b, c und A, B, C trigonometrisch bringen lässt, blieben dem Verfasser durch rein geometrische Mittel Probleme, weshalb auch dieses Dreieck unter den Nebendreiecken nicht angeführt wurde, und es geschieht hier desselben nur Erwähnung, weil vielleicht Andere, darauf aufmerksam gemacht, so glücklich sind, diese Probleme zu lösen.

Aufgaben.

a) Zur Construction des Hauptdreiecks ist oder sind gegeben für Aufgabe **1.** $\Delta\, T'T''T'''$; **2.** $\Delta\, BCA'$; **3.** $\Delta\, BCD'$; **4.** $\Delta\, BM'D'$; **5.** $\Delta\, A'B''C'''$; **6.** $\Delta\, A_1B'C'$; **7.** $\Delta\, A'B_1C_1$; **8.** $\Delta\, A_1\alpha_{1_b}\alpha_{1_c}$; **9.** $\Delta\, A_1B_1C_1$; **10.** $\Delta\, M'A'C'''$; **11.** a, h' und $b+c$ $\big(ah' = (a+b+c)\,r\big)$; **12.** r, r' und $b-c$ (also $b > c$); **13.** r', t' und t''; **14.** A_1B', A_1C' und r; **15.** t'', t''' und $M'T_1$; **16.** $b-c$, a und $\sphericalangle A$; **17.** $\sphericalangle B$, r und $T'T''$ (weshalb darf statt $T'T''$ nicht $T'T'''$ gegeben werden?); **18.** r, $\sphericalangle A$ und der Winkel, gebildet durch $M'T''$ und das Perpendikel von T'' auf $T'T'''$; **19.** r', in demselben Punkt D' und t'''; **20.** a, $b+c$ und t''; **21.** r, R und Radius O'; **22.** $B-C$, r' und $A'A$; **23.** $\sphericalangle AA'B$, r' und $A'A$; **24.** r', $A'A$ und AA_3 (durch Betrachtung des symmetrischen Dreiecks von Δ_3 an BC'''); **25.** $b-c$, $B-C$ und $T'Z'$; **26.** r, $T'Z'$ und $\sphericalangle B$ (B der grössere Winkel an a); **27.** dieselben Gaben (B der kleinere Winkel an a); **28.** $b-c$, $B-C$ und $M'A$; **29.** r', r'' und c; **30.** $b-c$, $M'B$ und Radius O'; **31.** R, $A\eta'$ und $\sphericalangle B''AA_2$; **32.** R, die kleinste Dreieckseite (die also kleiner sein muss, als die Seite eines in den Kreis R eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks) und in ihr der Punkt, durch welchen die verlängerte Centrale $M'M''$ geht; **33.** $b-c$, r und $H'O'$; **34.** $B''C'''$, in ihr der Punkt A und $\eta'M'''$; **35.** r', r'' und r'''; **36.** das durch die Gerade $D''D'''$ vom $\Delta\, ABC$ abgeschnittene Dreieck; **37.** AC und die Lage der Punkte δ' und δ''' (welche Bedingungen sind bei dieser Aufgabe für die Lage von δ' und δ'''?); **38.** $B''C'''$, $A\eta'$ und AM'; **39.** $\sphericalangle C$ (der kleinste Dreieckswinkel), $A\eta'$ (oder $B\eta''$ — warum nicht $C\eta'''$?) und R; **40.** $A\eta'$, AM' und R; **41.** $A\eta'$, $M'M''$ und R (bei dieser Aufgabe muss es ausgesprochen werden, dass $\sphericalangle A$ der grösste, mittlere oder kleinste Winkel ist; **42.** a, R und $M'A$ (Es muss gesagt werden, auf welcher Seite von BC der Punkt A liegt. Wie gross ist das Maximum von $M'A$?); **43.** Weshalb sind die Gaben $a+b$, r' und r'' nicht bestimmend, und wie viele nicht congruente Dreiecke lassen sich durch diese Gaben construiren?

b) Die Beweise folgender Behauptungen als Aufgaben.

44. So wie AC durch $\delta'\delta'''$ in seine Tangenten zerlegt wird, wird $\delta'\delta'''$ durch AC in dem Verhältnisse dieser Tangenten geschnitten. Dasselbe gilt bei den sich schneidenden AB und $\delta'\delta''$, wie auch bei BC und $\delta''\delta'''$.

45. $T'\delta''' . T''\delta' . T'''\delta'' = \delta''T' . \delta'''T'' . \delta'T'''$.

46. Macht man in $B''C'''$ die Strecke $B''\xi' = C'''A$, in $A'C'''$ die Strecke $A'\xi'' = C'''B$ und in $A'B''$ die Strecke $A'\xi''' = B''C$, so ist $\Delta\xi'\xi''\xi''' \cong \Delta\delta'\delta''\delta'''$.

47. $\sphericalangle M'AM'' = \sphericalangle T'M'Z'$; $\sphericalangle M'BM'' = \sphericalangle T''M'Z''$; $\sphericalangle M'CM'' = \sphericalangle T'''M'Z'''$.

48. Eine beliebige Seite des Höhendreiecks eines aussen angeschriebenen Dreieckes (z. B. B_1C_1 in Δ_1) ist gleich dem Produkte aus der correspondirenden Seite des mit diesem Höhendreiecke ähnlichen Hauptdreieckes und r, dividirt durch die Strecke von M' bis in den Scheitel desjenigen Hauptdreiecks-winkels, welcher der Seite gegenüberliegt, an welche das Dreieck, in welchem sich jenes Höhendreieck befindet, angeschrieben ist (z. B. $B_1C_1 = \frac{ar}{M'A}$; $A_2C_2 = \frac{br}{M'B}$; $A_3B_3 = \frac{cr}{M'C}$ etc.).

49. $AM' = \frac{b . BB_3}{t} = \frac{c . CC_2}{t}$; $BM' = \frac{a . AA_3}{t} = \frac{c . CC_1}{t}$; $CM' = \frac{a . AA_2}{t} = \frac{b . BB_1}{t}$ (wie wird dies durch einen Satz allgemein ausgedrückt?).

Allgemeine Figur.

